Un fil d'Ariane

par Lucien SALLES (Saint-Germain)

"Chaque fois que, dans un ensemble muni d'une relation, on considère un élément (ou une partie), il y a organisation de l'ensemble autour de cet élément (de cette partie)".

Cette considération simple, qui est un des leitmotive de notre collègue CROZES, peut servir de fil d'Ariane pour une grosse part de la recherche en classe de Seconde ; je vais présenter ici deux applications :

1 *Le corps des réels* $(\mathbf{R}, +, \times)$

Comment s'organise $(\mathbf{R}, +)$ autour d'un réel a donné ?

1) On peut considérer les réels : a, a+a, (a+a) + a ..., et l'on pose naturellement : a+a = 2a, (a+a) + a = 3a ..., et l'on étend à $\mathbf{Z}$: 1a = a, 0a = 0, −1.a = −a, −2.a = (−a) + (−a) ..., ce qui permet d'obtenir l'ensemble $a.\mathbf{Z}$ des multiples de a .

Mais $a.\mathbf{Z}$ est une partie de R qui est, lui, muni de deux opérations ; comment $a.\mathbf{Z}$ se comporte-t-il vis-à-vis de ces opérations ?

2) Nous avons maintenant une partie $(a.\mathbf{Z}, +)$ de $(\mathbf{R}, +)$; deux éléments x et y de R étant donnés, deux relations se présentent à l'esprit : $x \, S \, y$ *ssi* $(x+y) \in a.\mathbf{Z}$ ou $x \, S' \, y$ *ssi* $(x-y) \in a.\mathbf{Z}$; la première ne présente d'autre intérêt que celui de ne pas en avoir ; la seconde, par contre, est une *relation d'équivalence* ... et voilà les congruences avancées.

3) On peut aussi étudier le comportement de a vis-à-vis des réels et l'on obtient les applications du type

$$f_a \; : \; x \longmapsto a + x$$

l'ensemble de ces applications pouvant être muni d'une structure additive (ce sont les opérateurs "ajouter a" de l'école élémentaire).

Le même travail se fait évidemment aussi dans $(\mathbf{R}_*, \times)$; on obtient :

1) L'ensemble $a^{\mathbf{Z}}$ des puissances d'un réel a.

2) La relation S définie par $x \, S \, y$ *ssi* $\frac{x}{y} \in a^{\mathbf{Z}}$, qui n'est pas spécialement étudiée.

3) Les applications du type

$$h_a \; : \; x \longmapsto ax$$

la composition des applications des deux types donnant les applications du premier degré.

On peut encore, mais là on arrive au programme de Terminale, reprendre ce genre d'étude avec deux réels a et b et l'on obtient l'ensemble $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$... .

2 *Appliquons maintenant cette méthode à la géométrie*

Dans tout ce qui suit nous considérerons un $\mathbf{R}$—vectoriel $(E, +, .)$.

Ici, l'étude des multiples d'un vecteur $\vec{a}$ donné (action de l'addition sur $\vec{a}$) est une partie de l'étude du comportement de $\vec{a}$ vis-à-vis des réels (action de la multiplication externe sur $\vec{a}$) qui est plus intéressante et donne l'ensemble $\mathbf{R}.\vec{a}$; si $\vec{a}$ est différent de $\vec{0}$, $\mathbf{R}.\vec{a}$ est appelée droite vectorielle dont $\vec{a}$ est un vecteur directeur (par analogie avec la "droite" de quatrième).

$\mathbf{R}.\vec{a}$ étant une partie de $(E, +, .)$ il est logique de considérer les restrictions à $\mathbf{R}.\vec{a}$ de + et . ; $(\mathbf{R}.\vec{a}, +, .)$ est un espace vectoriel.

La relation définie dans E^2 par : $\vec{x} \, S \, \vec{y}$ *ssi* $\vec{x}-\vec{y} \in \mathbf{R}.\vec{a}$ est une relation d'équivalence. Un dessin dans le plan conduit à appeler droites (affines) de direction $\mathbf{R}.\vec{a}$ les classes d'équivalence associées et à définir le parallélisme. La droite $D(\vec{b}, \vec{a})$ passant par $\vec{b}$ et de vecteur directeur $\vec{a}$ étant l'ensemble

$$\{ \vec{y} \in E / \; \exists \; x \in \mathbf{R} \; (\vec{y} = x.\vec{a} + \vec{b}) \}$$

Le comportement de $\vec{a}$ vis-à-vis des éléments de E permet de définir les translations $t_{\vec{a}} : \vec{x} \longmapsto \vec{a} + \vec{x}$ (la seule opération possible avec $\vec{a}$ et $\vec{x}$ étant l'addition).

Le comportement d'un vecteur $\vec{a}$ vis-à-vis des réels a été étudié au début (droites vectorielles et $\{\vec{0}\}$).

Le comportement d'un réel p vis-à-vis des vecteurs donne les homothéties $h_p : \vec{x} \longmapsto p\vec{x}$ (la seule opération possible entre un réel et un vecteur étant la multiplication externe).

Arrivé là, diverses voies s'offrent à la recherche, l'ordre ayant peu d'importance, la totalité étant cependant au programme :

Dans (E, +, .) sont définies deux lois de composition et les notions de droites vectorielles et affines, de parallélisme ; comment se comportent translations et homothéties vis-à-vis de ces notions ? (non linéarité des translations, linéarité des homothéties, l'image d'une droite affine est une droite affine de même direction, droites invariantes ...).

Les translations et les homothéties sont des applications de E dans E, on peut donc les composer : on obtient ainsi les groupes $(T, \circ)$, $(H_*, \circ)$, le second étant isomorphe à $(\mathbf{R}_*, \times)$ [on peut (ou non) définir une addition dans H de façon à faire de $(H, +, \circ)$ un corps isomorphe à $(\mathbf{R}, +, \times)$], le groupe $(D, \circ)$ des dilatations.

Tout cela peut donc s'étudier en regardant le comportement d'*un* vecteur ou d'*un* réel vis-à-vis des autres.

Si, pour aller un peu plus loin, on se donne plusieurs vecteurs de E, $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, ..., $\vec{a_n}$ par exemple, l'addition et la multiplication externe de E nous conduisent à considérer les vecteurs de E de la forme :

$$\vec{x} = x_1 \vec{a_1} + x_2 \vec{a_2} + \dots + x_n \vec{a_n}$$

qu'on appelle combinaisons linéaires de $\vec{a_1}$, ... $\vec{a_n}$.

L'ensemble de ces combinaisons linéaires est une partie L de E ; comment se comporte-t-elle vis-à-vis des opérations de E ?

On obtient ainsi les notions de parties génératrices et de parties génératrices minimales d'un espace vectoriel. J'avoue ne pas voir comment introduire *naturellement* (sinon par analogie avec le plan de Quatrième) la condition d'unicité de la décomposition d'un vecteur sur une partie génératrice minimale.

Une fois définie la notion de base, il reste évidemment à reprendre entièrement les principales notions étudiées pour voir ce qu'apportent les coordonnées : isomorphisme de E (dim E = n) avec $\mathbb{R}^n$, équations d'une droite, condition de colinéarité ... .