Un transformateur linéaire

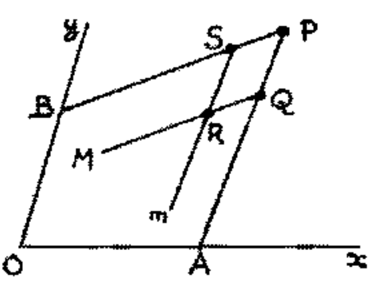
par E. EHRHART, Strasbourg

Dans le sillage de la mathématique moderne la *transformation linéaire plane* est étudiée de plus en plus à tous les niveaux. Mais en général on ne pose pas les deux questions concrètes suivantes : Pour une figure donnée quelle est la forme de sa transformée linéaire ? Comment la tracer pratiquement ? Nous allons répondre à ces questions, en nous limitant à la transformation L non dégénérée, c'est-à-dire ayant un point double O et un seul à distance finie et deux directions doubles distinctes Δ, Δ', que nous supposons d'abord réelles.

1) *La transformée linéaire d'une figure plane est, à une similitude directe ou inverse près, une ombre au soleil.*

Menons par O les axes Ox, Oy de directions Δ, Δ'. Les équations de L ont alors la forme $X = ax$, $Y = by$. Par suite $L = \mathcal{H}\mathcal{A}$, produit de l'homothétie (O,a) par l'affinité d'axe Ox, de direction Oy et de rapport $\frac{b}{a}$, affinité qui donne bien une ombre au soleil.

2) *Un transformateur linéaire* (Nous proposons de l'appeler *eidographe* d'après le mot grec *eidos*, qui signifie image ou ombre)*



Un système de quatre tiges PA, PB, QM, Sm forme un parallélogramme articulé PQRS, qui maintient alignés les points A, m, M, B quand A et B se déplacent dans les glissières qui matérialisent Ox et Oy. Quand m(x,y) décrit une figure, M(X,Y) décrit sa transformée par L, si on prend $\overline{SR} = a\overline{Sm}$ et $\overline{QR} = \frac{\overline{QM}}{b}$. En effet

$$\frac{X}{x} = \frac{\overline{BM}}{\overline{Bm}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{Sm}} = a, \qquad \frac{Y}{y} = \frac{\overline{AM}}{\overline{Am}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{QR}} = b\,.$$

* Lors des Journées de l'A.P.M. en février 1966 à Strasbourg, j'avais exposé cet appareil, construit en plexiglass aux ateliers de l'Institut de mécanique des fluides dirigé par M. Saekmann.

Si les directions doubles Δ, Δ' de L sont imaginaires conjuguées, on remplace au préalable la figure F par sa symétrique F_1 par rapport à une droite. Les figures F_1 et F', transformée de F par L, se correspondent alors dans une transformation linéaire $L' = \mathcal{H}\mathcal{A}$ de directions doubles réelles :

$$L = SL' = S\,\mathcal{H}\mathcal{A}.$$

Or le produit de la symétrie S par $\mathcal{H}$ est une similitude inverse.