

Axiomatique pour les dimensions physiques, les scalaires et les vecteurs du physicien

par P. ROUGÉE

Nous présentons dans cet article une axiomatique pour les scalaires et les vecteurs utilisés par le physicien dans sa schématisation du monde matériel en physique classique (*). Nous introduisons un groupe $\mathcal{D}$ dont les éléments schématisent les dimensions physiques, et nous donnons l'axiomatique de structures que nous qualifions de physiques et qui généralisent celles classiques de corps, d'espaces vectoriels, etc ..., et qui se réduisent à ces structures classiques lorsque $\mathcal{D}$ ne contient que l'élément neutre. Sans prétendre épuiser le sujet, nous montrons que l'essentiel de l'algèbre linéaire classique peut être repris dans ce cadre élargi.

Les structures ainsi introduites sont celles dans lesquelles le physicien pense ses concepts, et qu'il atteint sur le plan mathématique à partir de représentations dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^3$ tributaires en particulier de choix d'unités dont l'influence est ensuite étudiée par la technique connue qui aboutit aux équations aux dimensions classiques. Ce phénomène d'élaboration semi-empirique d'un cadre conceptuel intrinsèque à partir de représentations tributaires d'éléments non intrinsèques choisis arbitrairement et que l'on fait ensuite varier est fréquent en physique ; nous en donnons une analyse et des exemples.

Nous indiquons comment on peut penser l'ancrage de ces structures comme modèles du concret, et nous donnons deux exemples. L'un, donné en annexe, est obtenu par construction à base de produits tensoriels. Il privilégie un système de générateurs du groupe $\mathcal{D}$: on peut donc considérer qu'il constitue le cadre mathématique dans lequel travaille le physicien après choix des dimensions fondamentales. L'autre, qui pour les scalaires n'est autre que le produit cartésien $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$, privilégie un système

(*) Un article sur le même sujet, plus simple et plus descriptif, doit paraître dans le numéro d'avril du Bulletin de l'Union des Physiciens, sous le titre "Les scalaires et les vecteurs du physicien".

d'unités et peut donc être assimilé au cadre mathématique dans lequel on travaille après choix des étalons. Il faut toutefois remarquer que ces cadres ne sont pas ceux dans lesquels évolue couramment le physicien : le langage et les formules de la physique ne sont pas (ou ne devraient pas être : il y a encore des exceptions en électromagnétisme) tributaires du système de dimensions fondamentales et d'étalons utilisé, sinon tout serait à repenser lorsque l'on change d'étalon de longueur ou lorsque l'on passe du système M K_s S au système C G S .

Nous espérons par cet article aider l'enseignant mathématicien à mieux comprendre, donc reconnaître et admettre, le cadre conceptuel dans lequel évolue son collègue physicien, ainsi que sa façon de le construire, ce qui ne peut que les aider dans leur collaboration pédagogique.

I — LE GROUPE DES DIMENSIONS PHYSIQUES

Le physicien utilise le concept de dimension physique. Nous savons qu'il parle des dimensions longueur L, temps T, masse M, vitesse V, force F, intensité de courant A, quantité d'électricité Q, etc ...

Ces dimensions, il les "compose" entre elles. C'est ainsi qu'en faisant par exemple le "produit" des dimensions vitesse V et temps T il obtient la dimension longueur L. Il introduit également le concept d'absence de dimension physique auquel il n'affecte pas de symbole particulier mais que nous désignerons quant à nous par I, moyennant quoi nous pourrions affirmer que le produit de la dimension D par I est égal à D :

$$VT = TV = L \quad ; \quad DI = ID = D$$

Enfin, nous savons également qu'il manipule par exemple une dimension qu'il note T^{-1} et dont le produit par T est l'absence de dimension I .

Ces quelques remarques nous font prendre conscience que : *L'ensemble D des dimensions physiques utilisé par le physicien est un groupe commutatif dont l'élément neutre est l'absence de dimension physique, notée I , et dont la loi de composition est notée sous forme multiplicative.*

Ce groupe n'est pas quelconque. On sait en effet que, une fois choisi un ensemble particulier de dimensions dites fondamentales,

toute autre dimension se met de façon unique sous forme d'un produit des dimensions fondamentales ou de leurs inverses.

On a autrefois utilisé les dimensions fondamentales $\{L, T, F, Q\}$, et on avait : $V = LT^{-1}$, $M = FL^{-1}T^2$, $A = QT^{-1}$, etc ...

L'usage semble maintenant être stabilisé sur $\{L, T, M, A\}$, ce qui donne $V = LT^{-1}$, $F = MLT^{-2}$, $Q = AT$, etc ..., mais il pourrait être autre.

En fait, le choix des dimensions fondamentales est lié au choix des étalons et donc à l'ancrage du modèle sur le concret. Nous reviendrons sur le sujet.

Les remarques ci-dessus se traduisent sur le plan mathématique en disant que $\mathcal{D}$ est un groupe libre de type fini, et que tout système de dimensions fondamentales en est une base.

Dans la suite nous ne supposons pas fait un choix définitif d'une base dans $\mathcal{D}$, même si nous utilisons systématiquement $\{L, T, M, A\}$ comme exemple.

Signalons enfin que l'on peut envisager de n'utiliser que des sous-groupes de $\mathcal{D}$ (par exemple, le sous-groupe engendré par L et T est suffisant en cinématique). On peut également sortir du cadre étroit de la physique et envisager par exemple une dimension "produit national brut Π " et une dimension "population P ", d'où une dimension $\Pi T^{-1} P^{-1}$ pour le taux de P.N.B. par rapport au temps et à la population (qui, en anticipant sur la suite, s'exprimera en "francs- Π " par an et par millier d'habitants).

II — LES SCALAIRES PHYSIQUES

L'objet de ce paragraphe est essentiellement de dégager une axiomatique pour les "grandeurs" scalaires telles que les manipule le physicien.

On sait que ces scalaires peuvent être ajoutés et multipliés :

$$300 \text{ m} + 4 \text{ km} = 43 \text{ km} ; 3 \text{ grammes} \times 4 \text{ ms}^{-2} = 1200 \text{ dynes}$$

donc aussi soustraits et divisés, de façon très voisine de ce que fait le mathématicien avec ses nombres réels qui constituent un corps, mais avec quelques précautions spéciales dues au fait que ces scalaires ont en fait une dimension physique, la plus importante étant que deux scalaires ne peuvent être ajoutés que s'ils ont la même dimension physique. Ce sont ces précautions et les règles générales de calcul que nous institutionnalisons dans la :

Définition : Nous appellerons *corps physique* tout ensemble K doté de la structure définie par la donnée de A_1, A_2, A_3 , vérifiant (i),(ii),(iii) :

A_1 — Une application surjective de K dans $\mathcal{D}$.

[qui donc affecte à tout élément d de K une dimension physique, que nous noterons $D(d)$. On notera $K(D)$ l'ensemble des éléments de K de dimension D . Aucun des $K(D)$ n'est vide, et K est la réunion de ces $K(D) : K = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} K(D)$. Les éléments de dimension I sont dits sans dimension].

A_2 — Une loi de groupe commutatif dans chaque $K(D)$

[cette loi est notée $+$, et son élément neutre est noté O_D (ou 0 si aucune ambiguïté n'est possible)]

A_3 — Une loi de composition interne dans K , dite *produit* :

$$\begin{aligned} K \times K &\longrightarrow K \\ (d, d') &\longmapsto dd' \end{aligned}$$

(i) Le produit est une loi de groupe commutatif dans

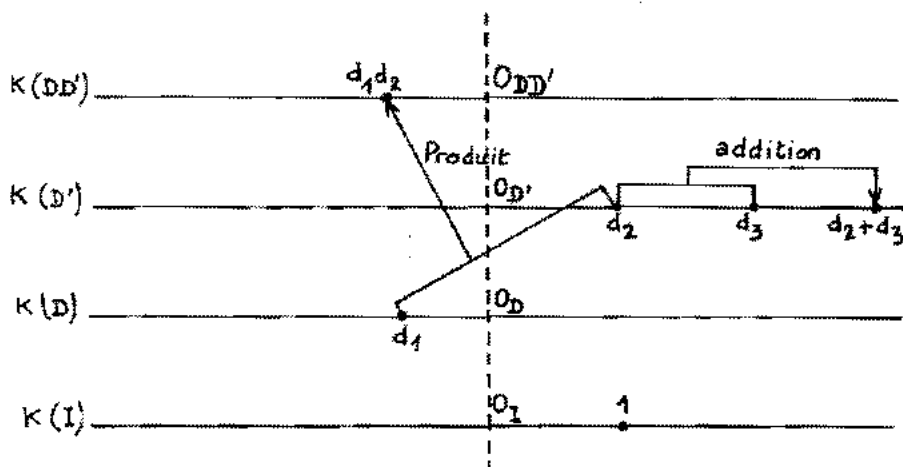
$$K^* \stackrel{\text{def}}{=} K - \{O_D, D \in \mathcal{D}\}$$

(ii) Le produit vérifie l'"équation aux dimensions" :

$$(\forall d) (\forall d') \quad D(dd') = D(d) D(d')$$

(iii) Le produit est distributif par rapport à l'addition :

$$(\forall d_1) (\forall d_2) (\forall d_3) \quad [D(d_1) = D(d_2)] \rightarrow [(d_1 + d_2)d_3 = d_1d_3 + d_2d_3]$$



[nous noterons 1 l'élément neutre du produit, d^{-1} l'inverse de d non nul, d^n et d^{-n} les puissances $n^{\text{ème}}$ de d et d^{-1}]

On aura évidemment remarqué :

dans A_1 : le fait que chaque scalaire en physique a une dimension physique (ou est sans dimension, c'est-à-dire a la dimension 1)

dans A_2 : le fait que l'on peut ajouter ou soustraire deux scalaires dans la mesure où ils ont la même dimension physique

dans A_3 : le fait que l'on peut multiplier deux scalaires quelconques

dans (i) : les propriétés de la multiplication par 1 et la possibilité de diviser par un scalaire non nul

dans (ii) : la règle qui permet par exemple de dire que $\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ a pour dimension physique $M L^2 T^{-2}$

dans (iii) : la distributivité classique qui permet par exemple d'écrire :

$$(300 \text{ g} + 4 \text{ kg}) 2 \text{ m s}^{-1} = 8,6 \text{ m s}^{-1} \text{ kg}$$

Propriétés des corps physiques.

On peut aisément déduire des axiomes les propriétés suivantes :

P_1 — L'élément neutre 1 est dans $K(I)$, et $K(I)$ muni de sa loi + et de la restriction de la loi produit est un corps d'élément unité 1.

P_2 — Quel que soit D , l'ensemble $K(D)$ muni de sa loi interne additive et de la loi externe (restriction du produit) :

$$\begin{aligned} (k, d) &\longmapsto k d \\ K(I) \times K(D) &\longrightarrow K(D) \end{aligned}$$

est un espace vectoriel sur le corps $K(I)$.

P_3 — Quel que soit $d \in K^*$ (donc non nul), l'application

$$\begin{aligned} d' &\longmapsto d d' \\ K(D') &\longrightarrow K(D D') \end{aligned}$$

est un isomorphisme pour les structures vectorielles.

P_4 — Quel que soit D , $K(D)$ est un espace vectoriel de dimension un sur le corps $K(I)$ (appliquer P_3 avec $D' = I$).

P_5 — Quel que soit D , l'application :

$$\begin{aligned} (d, d') &\longmapsto d d' \\ K(D) \times K(D^{-1}) &\longrightarrow K(I) \end{aligned}$$

est bilinéaire non dégénérée. Elle met donc en dualité les espaces vectoriels $K(D)$ et $K(D^{-1})$ et permet d'identifier $K(D^{-1})$ au dual de $K(D)$.

Parmi ces propriétés on remarquera en particulier P_4 , qui fait apparaître dans K un corps au sens mathématique classique, $K(I)$, et une collection d'espaces vectoriels de dimension un sur ce corps. Dans le cas où il s'agira du corps des nombres réels $\mathbb{R}$, ces espaces vectoriels seront les espaces vectoriels des longueurs, des durées, etc..., dont on parle maintenant assez couramment, mais ici intégrés dans une structure plus vaste qui permet la communication entre ces espaces.

Dire (par exemple) que les durées constituent un espace vectoriel réel est une façon de préciser une partie des calculs autorisés avec ces durées. Nous ne dirons pas pour autant que les durées sont des vecteurs, réservant ce terme à des êtres relatifs à la schématisation de notre espace physique comme il est d'usage en physique.

Ayant appelé K un "corps physique" nous appellerons "scalaire physique" ou plus simplement "scalaire" ses éléments, nous conformant là aussi à l'usage le plus classique en physique. Ces scalaires seront dits réels si $K(I)$ est le corps des nombres réels et complexes s'il s'agit du corps des nombres complexes.

Cette terminologie est d'ailleurs cohérente avec la tradition mathématique si on fait la :

Remarque : Dans le cas où le groupe des dimensions physiques $\mathcal{D}$ qui est utilisé ne contiendrait que l'élément neutre I le corps physique ne contiendrait que $K(I)$, et ce serait donc un corps au sens mathématique classique :

La structure de corps physique ici introduite est une généralisation de la structure de corps.

Exemples de corps physiques.

Exemple 1 : $\mathcal{D} \times K$

Etant donné un corps (classique) K , on peut munir canoniquement le produit cartésien $\mathcal{D} \times K$, c'est-à-dire l'ensemble des couples (D, k) constitués d'une dimension physique D et d'un élément k de K , d'une structure de corps physique, que nous noterons $\mathcal{D} \times K$.

La dimension physique de (D, k) sera évidemment D , et on aura donc

$$K(D) = \{(D, k), k \in K\}$$

La somme et le produit seront quant à eux définis par (en notant additivement et multiplicativement les lois de K comme s'il s'agissait de $\mathbb{R}$) :

$$(D, k_1) + (D, k_2) = (D, k_1 + k_2) ; (D_1, k_1)(D_2, k_2) = (D_1 D_2, k_1 k_2)$$

On pourra vérifier que les propriétés requises pour que l'on ait ainsi un corps physique sont vérifiées.

On remarquera que le corps $K(I)$ et le corps K de départ sont canoniquement isomorphes dans l'application : $(D, k) \mapsto k$

On remarquera également que quelles que soient les dimensions physiques D_1 et D_2 , les espaces vectoriels $K(D_1)$ et $K(D_2)$ sont eux aussi isomorphes canoniquement dans l'application : $(D_1, k) \mapsto (D_2, k)$.

Un tel isomorphisme canonique n'existe pas dans un corps physique quelconque : on ne peut donc pas réduire la structure de corps physique à celle des produits $D \otimes K$.

Exemple 2 : $R_L \otimes R_T \otimes R_M$

Nous donnons en annexe la construction d'un corps physique qui ne présente pas la particularité signalée ci-dessus.

Le lecteur non familier avec les produits tensoriels peut parfaitement se dispenser d'entrer dans le détail assez technique de sa construction. Il lui suffira de savoir qu'il est construit à partir de trois espaces vectoriels réels de dimension un donnés au départ, et qui sont l'espace vectoriel des longueurs R_L , celui des durées R_T et celui des masses R_M (nous nous sommes limités au groupe des dimensions mécaniques), et qu'il est tel que son $K(L)$ soit R_L et que de même $K(T) = R_T$ et $K(M) = R_M$.

Il est donc construit en privilégiant un choix particulier de dimensions fondamentales, mais il est à part cela le plus général possible.

Sur le plan de la schématisation du monde concret, le fait d'avoir ainsi une structure mathématique privilégiant une base de $\mathbb{D}$ n'est pas un handicap, car l'ancrage du corps des réels physiques sur le concret, qui se fait par le choix des étalons, fait usage d'une telle base privilégiée.

III — LES SCALAIRES REELS

Bien que ce ne soit pas le seul (cf par exemple les intensités, tensions et impédances complexes de l'électricité), le corps physique le plus utilisé est certainement celui des réels, qui correspond au cas où $K(I)$ est égal à R .

Nous noterons R ce corps physique, ou plus précisément ce corps physique orienté comme il va être dit dans le paragraphe ci-dessous, et $R(D)$ l'ensemble des scalaires réels de dimension D .

1 -- Orientation de R

Les scalaires réels que manipule le physicien sont réputés être positifs ou négatifs. Il nous faut légaliser cette particularité en enrichissant un peu la structure algébrique de R .

Définition : Nous dirons que R est orienté si chaque $R(D)$ l'est, en tant qu'espace vectoriel de dimension un réel, et si les orientations choisies sont telles que la règle des signes classique pour le produit soit vérifiée.

De cette définition on peut tirer quelques remarques :

— La relation $1 \, d = d \, 1$ montre que l'orientation de $R(I) = R$ ne peut être que l'orientation classique.

— R sera orienté dès que le seront les $K(D)$ relatifs à un ensemble de dimensions fondamentales. Si $\{L, M, T, A\}$ est cet ensemble, le demi-espace positif de dimension $L^m M^n T^p A^q$ est alors l'ensemble des produits $l^m m^n t^p a^q$ où l, m, t, a sont des scalaires positifs de dimension L, M, T, A respectivement.

On en conclut d'une part qu'il y a 2^n façons d'orienter R , où n est le cardinal des bases de $\mathcal{D}$, et d'autre part que le corps physique $R_L \otimes R_M \otimes \dots$ est automatiquement orienté si les espaces vectoriels qui ont servi à sa construction le sont, ce qui est en fait le cas : puisque l'on parle de masses positives c'est que l'on a implicitement orienté l'espace vectoriel des masses.

Dans toute la suite R sera supposé orienté.

Sans prétendre épuiser le sujet, on pourra vérifier les quelques points ci-dessous :

a — Quel que soit $d \in R$, de dimension D , il existe un et un seul élément de $R(D)^+$, noté $|d|$, tel que l'on ait $|d|^2 = d^2$. Cet élément est égal à d si d est positif et à $-d$ si d est négatif.

b — Quels que soient $D \in \mathcal{D}$ et $d \in R(D^2)^+$, il existe un et un seul élément de $R(D)^+$, noté $d^{\frac{1}{2}}$, tel que l'on ait $(d^{\frac{1}{2}})^2 = d$.

Par contre, $d^{\frac{1}{2}}$ n'existe pas en général (ni $d^{1/3}$, etc ...), même si d est positif. Notre outil R ne nous permet pas de parler de la racine carrée d'une longueur par exemple. Le traditionnel $\sqrt{\frac{1}{g}}$ est certes autorisé, puisque $\frac{1}{g}$ est de dimension T^2 , mais ne saurait s'écrire $\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{g}}$.

S'il s'avérait qu'en physique on ait besoin de passer outre à de telles "interdictions" et qu'on le fasse avec bonheur, il conviendrait d'agrandir notre $\mathcal{D}$ pour y inclure des dimensions physiques de la forme $L^\alpha M^\beta \dots$ où $\alpha, \beta, \dots$ ne seraient pas entiers.

2 — Analyse dans R

Il est certain que sur le plan de l'analyse les composantes connexes de R que sont les $R(D)$ reprennent leur droit. Tant sur le plan mathématique que pour ce qui est de l'utilisation en physique, n'auront d'intérêt que les applications d'un $R(D)$ dans un autre.

On remarquera à ce sujet que si f est une application de $R(D)$ dans $R(D_1)$, le quotient différentiel

$$[f(d) - f(d_0)] (d - d_0)^{-1}$$

est dans $R(D_1 D^{-1})$. On définira donc la dérivée en d_0 de f comme étant le réel physique de dimension $(D_1 D^{-1})$ limite de ce quotient quand d tend vers d_0 .

De même les sommes de Riemann $\sum f(d_n) (d_{n+1} - d_n)$ sont dans $R(D D_1)$, et l'intégrale $\int f(x) dx$ sera définie comme étant un réel de dimension $D D_1$. A cette question de dimension physique près on retrouve bien sûr l'analyse classique dans R .

3 — Unités

Chaque $R(D)$ de R étant vectoriel de dimension un et orienté, une base positive de $R(D)$ est constituée d'un seul élément δ non nul positif :

$$\delta \in R(D)^{+*} \stackrel{\text{déf}}{=} R(D)^+ = \{0_D\}$$

Lorsqu'un tel élément δ a été choisi pour constituer une base de $R(D)$ on dit que ce δ est l'unité de grandeur de dimension D . L'unité de grandeur de dimension longueur est encore appelée unité de longueur, etc...

Lorsque chaque $R(D)$ de R a été ainsi doté d'une base positive, la collection des unités de grandeurs ainsi définies est par définition un système d'unités de R .

Un tel système est dit cohérent si et seulement si, en notant $\delta(D)$ l'unité de grandeur de dimension D , on a :

$$(\sqrt[D]{D} \in \mathcal{D}) (\sqrt[D']{D'} \in \mathcal{D}) : \delta(DD') = \delta(D) \delta(D')$$

Faisant $D = I$ on déduit que dans un système d'unités cohérent l'unité de grandeur sans dimension est nécessairement le réel 1.

Une façon simple de choisir un système d'unités cohérent consiste à faire choix d'un système de dimensions fondamentales, par exemple $\{L, M, T, A\}$, ainsi que d'une unité de grandeur pour chacune de ces dimensions fondamentales $\lambda, \mu, \tau, \alpha$ puis de définir les autres unités en posant

$$\delta (L^m M^n T^p A^q) \stackrel{\text{déf}}{=} \lambda^m \mu^n \tau^p \alpha^q$$

Ces unités sont dites *dérivées*, par opposition à $\lambda, \mu, \tau, \alpha$ qui sont dites *fondamentales*.

4 — Représentations de R sur $\mathcal{D} \otimes R$

Un système d'unités étant choisi, on peut associer à tout scalaire réel d sa mesure algébrique $\bar{d}$, telle par conséquent que l'on ait :

$$d = \bar{d} \delta (D(d))$$

On aura bien sûr : $[D(d_1) = D(d_2)] \Rightarrow [\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = \bar{d}_1 + \bar{d}_2]$ ainsi que, si toutefois le système d'unités choisi est cohérent : $\bar{d}_1 \bar{d}_2 = \bar{d}_1 \bar{d}_2$

On vérifie alors que l'application

$$g : \begin{cases} R \longrightarrow \mathcal{D} \otimes R \\ d \longmapsto (D(d), \bar{d}) \end{cases}$$

conserve la dimension physique et est compatible avec les différentes lois de composition internes définies dans R et $\mathcal{D} \otimes R$. Elle est en outre bijective, et nous dirons qu'il s'agit d'un isomorphisme pour les structures de corps physique de R et $\mathcal{D} \otimes R$.

Cet isomorphisme n'est certes pas canonique puisqu'il dépend du système d'unités cohérent qui a été utilisé.

Le physicien fait choix d'un système d'unités pour traiter ses "applications numériques", et il utilise alors g pour se placer dans $\mathcal{D} \otimes R$ au lieu de R , ne serait-ce que pendant qu'il manipule sa règle à calcul.

Mais on aurait tort de croire qu'il y reste longtemps. En particulier, dès qu'il annonce que la force calculée est égale à 3,6 Newton, il s'est replacé dans R .

Remarque.

Si deux systèmes cohérents, dont les unités fondamentales sont

$$\lambda, \mu, \tau, \alpha \text{ et } \lambda' = \alpha \lambda, \mu' = \beta \mu, \tau' = \gamma \tau, \alpha' = \delta \alpha$$

ont été choisis, on vérifie que les mesures $\bar{d}$ et $\bar{d}'$ d'un même scalaire d de dimension $L^m M^n T^p A^q$ sont liées par la relation :

$$\bar{d}' = \bar{d} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^m \left(\frac{1}{\beta}\right)^n \left(\frac{1}{\gamma}\right)^p \left(\frac{1}{\delta}\right)^q$$

Cette propriété de variance de la représentation de R dans $\mathcal{D} \times \mathcal{R}$ quand varie le système d'unités utilisé est le point de départ classique de l'introduction des équations aux dimensions et donc de l'accession à la structure de corps physique des réels.

Le processus est classique et exemplaire, et mérite qu'on s'y attarde. Le physicien n'annonce évidemment pas au départ qu'il schématise le concret par notre corps physique R . Il choisit un système d'étalons, puis d'unités liées à ces étalons, et affecte avec cela de schématiser dans $\mathcal{R}$ ou plus précisément dans $\mathcal{D} \times \mathcal{R}$ (plus ou moins conscient bien sûr) dans la mesure où il s'interdit d'ajouter le 3 qui mesure une longueur au 5,2 qui mesure un temps. Cette schématisation du concret dépend évidemment des unités choisies, choix très arbitraire, ce qui ne saurait satisfaire le physicien. *Il est alors amené à rattraper le caractère relatif que présente sa schématisation en relativisant les choix arbitraires qui ont présidé à son élaboration, c'est-à-dire en étudiant ce qu'elle devient quand il fait varier le choix des unités.*

Il faut comprendre que ce faisant il dépasse le cadre de $\mathcal{D} \times \mathcal{R}$ dans lequel il s'était placé pour en fait en arriver à penser ses concepts dans notre corps physique R , procédant ainsi à une véritable création de la structure mathématique intrinsèquement adaptée à la modélisation du concret qu'il se propose.

Il existe d'autres exemples de ce processus. C'est ainsi que l'espace est schématisé par $\mathcal{R}^3$ après choix arbitraire d'un trièdre, d'où les matrices lignes, colonnes, carrées, ou autres "tableaux de nombres", dont on se préoccupe ensuite de savoir comment ils varient quand on change de trièdre. On reconnaît là tout le calcul tensoriel tel qu'il est présenté dans les ouvrages à usage des physiciens et des mécaniciens. On sait que ce qui est en fait manipulé à travers tout cela, c'est un espace vectoriel E , son dual E^* , $\mathcal{L}(E, E^*)$, et toute sorte de produits tensoriels $E \otimes E^* \otimes \dots$

Un autre exemple est fourni par les vecteurs polaires. L'espace ayant été schématisé par un espace euclidien orienté, ce qui est bien pratique pour définir élémentairement le produit vectoriel mais ce qui n'est pas intrinsèque puisque résultant d'un choix arbitraire pour l'orientation, on est amené, toujours pour les mêmes raisons de recherche de la modélisation la plus intrinsèque possible, à faire varier l'orientation de l'espace, et on débouche ainsi sur certains vecteurs, dits polaires ou pseudo, qui ont l'idée bizarre de changer de sens au cours de l'opération (en fait, tel concept qui était schématisé par le vecteur $\vec{U}$ l'est par $-\vec{U}$ dans la seconde schématisation).

Dans ce cas aussi la structure mathématique sous-jacente à ces pratiques est connue : le physicien schématise en fait par un espace non orienté (l'espace n'est pas orienté) et fait de l'algèbre extérieure déguisée.

Devant ces habitudes, qui sont en fait la persistance du processus historique de création par le physicien de la structure mathématique dans laquelle il pense ses concepts, le mathématicien "moderne" doit s'efforcer de prendre conscience de la véritable nature de cette structure, et aider le physicien à s'y placer de façon consciente au départ, lui évitant ainsi d'avoir à s'y hisser au prix d'efforts quelquefois acrobatiques ou de formulations très subjectives.

Et partout où il y a un théorème de variance, dont les physiciens sont à juste titre friands, il y a anguille sous roche.

La simplification qui en résultera est certaine. Il est en effet plus simple de travailler dans un espace vectoriel E postulé au départ que dans l'espace vectoriel (qui, certes, lui est canoniquement isomorphe comme il se doit) des applications f de l'ensemble des bases $\mathcal{B}$ de E dans $\mathbb{R}^3$ telles que :

$$f(\mathcal{B}') = M(\mathcal{B}, \mathcal{B}') f(\mathcal{B})$$

où $M(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ désigne la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Par ailleurs, les changements de trièdres ou d'orientation, qui n'ont en fait rien à voir avec le développement de la théorie au niveau conceptuel, interfèrent trop souvent avec ce développement, et sous forme parfois dangereusement intrinsèque de translations, rotations ou symétrie de l'espace tout aussi inutiles, en masquant ainsi la simplicité ou ajoutant à sa complexité. Il s'agit là d'habitudes très répandues qui ne disparaîtront pas facilement.

5 — Ancrage du modèle : les étalons.

Dans sa reconstruction conceptuelle du monde, le physicien introduit d'abord quelques concepts indépendants qu'il considère comme premiers et à l'aide desquels il élabore d'autres concepts. C'est ainsi par exemple que le concept de vitesse est introduit à partir des concepts premiers de temps et de longueur. Il fait en particulier ainsi choix d'un système de dimensions fondamentales.

Si D est une de ces dimensions, l'espace vectoriel $R(D)$ des grandeurs scalaires de dimension D est alors ancré sur le concret par des méthodes de comparaison bien connues, qui amènent à faire choix d'un élément matériel de référence appelé *étalon* pour cette dimension physique.

On remarquera que pour les dimensions non fondamentales le processus est différent : le soi-disant étalon de vitesse défini comme étant la vitesse qu'aurait un mobile parcourant l'étalon de longueur pendant l'étalon de temps n'est pas un véritable étalon. Il n'est pas matériel, et le conditionnel prouve qu'il s'agit bien d'une vue de l'esprit (d'ailleurs inutile si on fait la nécessaire distinction entre le choix de l'étalon et celui de l'unité qui est un problème distinct même s'il lui est historiquement lié).

C'est donc par ce choix des étalons pour les dimensions fondamentales que le modèle R est ancré sur le concret.

Analysons un peu le processus dans le cas de la dimension longueur. Afin d'être précis, nous réservons dans ce paragraphe le mot longueur pour le concept, appelant par ailleurs "éléments de $R(L)$ " les êtres mathématiques qui le schématisent.

La dimension longueur ayant été choisie fondamentale, on fait choix d'un objet ou d'une manifestation du monde matériel pour lequel ce concept a un sens précis, stable, et qui sera l'étalon de longueur. Simultanément, on donne un nom à l'élément de $R(L)$ qui schématisera la longueur de cet étalon, ou plutôt, et principalement pour des raisons historiques, à un de ses multiples : le mètre est par définition l'élément de $R(L)$ égal à 1,650.763,73 fois celui qui schématise la longueur de l'étalon, à savoir la longueur d'onde dans le vide de la radiation orangée de l'atome de Krypton 86.

Et l'ancrage réside très précisément dans ce choix de l'étalon appartenant au monde matériel et du nom appartenant au modèle.

Pour toute manifestation ou objet du monde matériel pour lequel le concept de longueur a un sens, le choix de l'élément de $R(L)$ qui schématisera sa longueur résultera de procédés expérimentaux de comparaison de celle-ci à celle de l'étalon. Ces procédés ne peuvent évidemment conduire à une détermination univoque, ce qui oblige à adopter une des deux attitudes suivantes : ou bien faire un choix assez arbitraire que l'on soignera plus ou moins en fonction de l'usage que l'on veut en faire (c'est ainsi que tous les humains mesurent un nombre entier de centimètres sur leur carte d'identité), ou bien ne pas se résoudre à un choix univoque, ce qui débouche sur les classiques incertitudes.

C'est ainsi que telle barre de platine du Pavillon de Breteuil est schématisée par un segment de $R(L)$ dont les extrémités sont les éléments $(1 \pm \epsilon)$ mètre où ϵ est de l'ordre de 10^{-9} . La seule longueur matérielle schématisée par un segment réduit à un point est celle de l'étalon.

L'imprécision du processus expérimental a trois causes principales : l'imprécision, pour ce qui est de sa longueur, de l'objet à comparer, l'imprécision des instruments et des techniques de comparaison, et l'imprécision de l'étalon lui-même. Les techniques de comparaison s'améliorant et le champ d'investigation s'élargissant, il peut arriver que le troisième facteur devienne prépondérant. L'étalon est alors caduc et il faut en changer, ce qui revient à garder l'outil mathématique, avec son élément mètre, mais à changer son ancrage sur le monde matériel.

C'est ainsi que la situation décrite plus haut a succédé à une autre, où l'étalon était la barre de platine citée. Celle-ci mesurait alors un mètre exactement, et la raie du Krypton mesurait $(1.650.763,73)^{-1} (1 \pm \epsilon)$ mètre.

Remarques.

1 — Le choix des étalons a une importance économique et scientifique telle qu'il est fixé par la loi. Ipso-facto, le choix des dimensions fondamentales a un caractère légal. Il y a toutefois des arrangements possibles dans le modèle mathématique. C'est ainsi que, s'il est illégal de choisir comme étalon de force la force de pesanteur qui s'exerce sur tel cylindre de platine, il est tout à fait permis d'appeler kilogramme-poids l'élément $\text{kgp} = 9,81 \text{ Newton}$, avec $\text{Newton} = 1000 \text{ gms}^{-2}$, et de signaler que la force en question est schématisable par un intervalle centré en kgp .

2 — Le choix des unités est un problème mathématique distinct du problème physique que constitue le choix des étalons. Venant après celui-ci, c'est-à-dire après ancrage sur le monde matériel, il utilise les éléments mètre, gramme, etc... mis en scène par cet ancrage légal, mais il peut aussi utiliser des éléments tels que kgp, défini ci-dessus à partir des éléments introduits par l'ancrage, et qui sont d'ailleurs plus ou moins des souvenirs d'ancrages abandonnés. En travaillant dans le système $MK_p S$ qui en découle, on utilise une base de dimensions fondamentales de $\mathcal{D}$ différente de la base légale.

3 — $R(L)$ étant de dimension un, tout élément sera de la forme α -mètre avec α scalaire sans dimension : $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour α égal à certaines puissances de 10 on définit le centimètre, le kilomètre, etc...

Pour terminer ce paragraphe sur les scalaires réels, disons que R est un ensemble dont les éléments sont :

2,3 secondes, 4 mètres, 10 ans, 6 km, 7 ms^{-1} , 8 tonnes, 9 grammes par litre, 10 Newtons, 11 kg p, 15 francs, 3 francs anciens, 1000 francs par mois, etc...

Deux éléments de R peuvent être multipliés ou divisés entre eux :

$$(4 \text{ m}) (\text{s}^{-1}) = 14,4 \text{ km/heure}$$

mais ne peuvent être ajoutés que s'ils sont de même dimension physique :

$$4 \text{ Newtons} + 3 \text{ kg p} = 33.430 \text{ g m s}^{-2}$$

mais (20 ans + 32 dents) n'a pas de sens... mathématique.

Le physicien ne peut manquer de retrouver là son outil de travail le plus familier. Il n'a strictement rien à changer à son langage et ses notations pour être en parfait accord avec les canons actuels de la pureté mathématique.

IV — L'ESPACE GEOMETRIQUE

En géométrie, théorie physique schématisant les aspects spatiaux de la matière qui nous entoure, le physicien utilise les concepts de point, de droite, de plan, de parallélisme et d'orthogonalité, de distance, de vecteur déplacement ou translation, etc..., et

l'on sait que la structure mathématique ainsi créée pour schématiser le monde matériel est ce que le mathématicien appelle un espace affine euclidien de dimension trois, et l'espace vectoriel associé.

A une différence près toutefois : pour le physicien, la distance de deux points et la norme d'un vecteur déplacement sont des scalaires de dimension physique L , et non des scalaires sans dimension comme pour le mathématicien.

Certes, cette différence est vite résorbée si on fait choix d'une unité de longueur, mais on a vu que le physicien ne se laisse qu'en apparence ligoter par ces choix arbitraires : il a l'habitude et le besoin de les relativiser pour obtenir un outil plus intrinsèque. Il nous faut donc, et c'est l'objet de ce paragraphe, adapter la structure d'espace affine euclidien pour qu'elle corresponde à cet outil intrinsèque.

Définition. Soit D une dimension physique. Nous appellerons espace vectoriel D -euclidien tout espace vectoriel E doté d'un D -produit scalaire, c'est-à-dire d'une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow R(D^2)^+ \\ (\vec{U}, \vec{V}) &\longmapsto \vec{U} \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

bilinéaire, symétrique et définie positive (> 0 si $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont non nuls).

On remarque évidemment que si $D = I$ on obtient un espace vectoriel classique, et que si δ est un scalaire non nul de dimension D , $\frac{1}{\delta^2} \vec{U} \cdot \vec{V}$ est un produit scalaire classique.

Dans une telle structure on dit que deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, et on définit la norme du vecteur $\vec{U}$ comme étant le scalaire $\|\vec{U}\|$, de dimension D , égal à $(\vec{U} \cdot \vec{U})^{1/2}$. On aura donc dans E des bases orthogonales, voire des bases, que nous dirons ortho- δ -normées, orthogonales et dont les vecteurs ont tous la même norme $\delta \in R(D)^+$, mais évidemment pas de normes égales à 1 si D n'est pas égal à I .

Définition. Soit D une dimension physique. Nous appellerons espace affine D -euclidien tout espace affine (réel) $\mathcal{E}$ dont l'espace vectoriel associé E est muni d'un D -produit scalaire.

La seule différence par rapport aux espaces affines classiques est évidemment que la distance de deux éléments A et B (appelés points) de $\mathcal{E}$, qui est égale par définition à la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, est un scalaire de dimension physique D .

Le cas particulier où D serait la dimension longueur L et où E serait de dimension (mathématique) trois nous fournit évidemment le modèle mathématique utilisé en géométrie euclidienne. on y fera toute la géométrie élémentaire classique, on y mesurera des longueurs, des aires, des volumes, qui seront des scalaires de dimension physique L , L^2 , L^3 comme il se doit, mais on s'apercevra vite de certaines limitations bien ennuyeuses pour le physicien. Par exemple, de l'impossibilité de définir le produit vectoriel dans ce cadre L-euclidien puisque la norme d'un tel produit, égale au produit des normes multiplié par un sinus, serait de dimension L^2 .

D'une façon générale, le physicien ne trouvera pas plus la totalité de ses vecteurs (vitesses, forces, etc...) dans notre E L-euclidien qu'il ne les trouve dans les structures sans dimension classiques.

Si donc l'espace affine L-euclidien présente un intérêt certain en géométrie, il semble par ailleurs nécessaire d'"agrandir" son espace vectoriel associé E pour lui faire contenir des vecteurs de toute dimension physique, tout comme nous avons agrandi le corps des scalaires $\mathbb{R}$ en le corps des scalaires physiques $\mathcal{R}$. Ceci est l'objet des paragraphes suivants, mais nous désirons faire auparavant quelques

Remarques à propos des espaces affines

1 - Une définition très répandue consiste à se donner a priori un espace vectoriel E, puis à définir ce qu'on appelle une structure affine "sur E".

Cet E posé a priori est maladroit et on peut l'éviter, par exemple en adoptant la :

Définition : On appelle espace affine tout ensemble $\mathcal{E}$ doté de la structure définie par la donnée de

— une relation d'équivalence (dite d'équipollence) $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$

— une structure d'espace vectoriel sur $\frac{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}{\mathcal{R}}$ vérifiant les axiomes ci-dessous où $\overrightarrow{AB}$ désigne la classe d'équivalence de (A,B)

$(\forall A), (\forall B), (\forall C) : \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} ; M \mapsto \overrightarrow{AM}$ bijectif

L'espace vectoriel $E \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathcal{E} \times \mathcal{E}}{\mathcal{R}}$ est dit associé à $\mathcal{E}$.

2 — Si on désire préciser la terminologie, il faut reprendre au maximum celle qui était en vigueur avant le passage du mathématicien moderne, à savoir :

- vecteur libre de $\mathcal{E}$ (je dis bien : de $\mathcal{E}$) pour $\vec{U} \in E$
- vecteur lié de $\mathcal{E}$ pour $(M, \vec{U}) \in \mathcal{E} \times E$
- champ de vecteurs pour une application (d'une partie X) de $\mathcal{E}$ dans E .

On remarquera que si le graphe d'une telle application est un ensemble de vecteurs liés, sa valeur en un point M de $\mathcal{E}$ est un vecteur libre. Il en est ainsi par exemple pour le champ des vitesses d'un corps matériel (X est alors la position occupée par ce corps à l'instant considéré).

3 — Enfin, et ceci est plus fondamental, s'il est vrai que sur le plan mathématique le choix d'une origine dans $\mathcal{E}$ permet de l'identifier à E , il reste que l'outil intrinsèque utilisé en physique classique pour schématiser l'espace est l'espace affine $\mathcal{E}$. Si on essaie, comme certains le prônent actuellement en mathématique, de nier la structure affine par choix arbitraire d'une origine et d'enfermer le physicien-géomètre dans la seule structure vectorielle, celui-ci s'en évadera par un processus déjà analysé en faisant varier cette origine pour se retrouver dans son véritable cadre conceptuel.

L'argument des observateurs mis en scène par le physicien, souvent utilisé pour prétendre que le physicien choisit une origine, ne tient pas à l'observation : en physique classique leur rôle intrinsèque n'est pas de matérialiser une origine mais un repère au sens cinématique, c'est-à-dire un espace affine en mouvement par rapport à un autre.

L'argument de la courbure de l'espace ou de l'espace-temps de la physique non newtonienne ne tient pas plus : outre le fait que nous ne parlons ici que de physique classique et donc de géométrie euclidienne, il est bien évident que dans les généralisations invoquées l'homologue de notre espace affine $\mathcal{E} \times \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est la droite affine des temps, sera la variété à quatre dimensions des événements elle-même, où aucune origine n'a à être choisie, tandis que les homologues de l'espace vectoriel $E \times R(T)$ seront les espaces vectoriels tangents en chaque point (ou plutôt événement) de cette variété.

Il est toutefois certain, par ailleurs, que si le mathématicien ne désire pas plus enseigner la théorie physique que constitue la géométrie euclidienne qu'il ne désire enseigner la dynamique, abandonnée depuis longtemps aux seuls physiciens, ou la cinématique, jetée depuis peu dans les oubliettes de la pluridisciplinarité, il est seul juge pour décider s'il a besoin ou non des espaces affines.

V — ESPACES VECTORIELS PHYSIQUES

1 — Définition

Nous désirons ici commencer à axiomatiser la structure mathématique qu'utilise le physicien quand il manipule ses vecteurs de toutes dimensions physiques : vecteurs déplacements, mais aussi vecteurs vitesse, force, moment magnétique, moment dynamique, etc...

La meilleure façon de trouver tous ces vecteurs réunis dans notre structure est encore de les y mettre à priori, d'où le point B_1 de la définition ci-dessous. Si par ailleurs on remarque que le physicien n'ajoute deux vecteurs que dans la mesure où ils ont même dimension physique, et ne se prive pas de multiplier un vecteur par un scalaire de dimension physique quelconque, par exemple pour obtenir la quantité de mouvement $m\vec{V}$, on s'explique la raison des points B_2 et B_3 . Quant aux règles qui suivent ces points, elles ne font que traduire des pratiques bien familières au physicien.

Définition. Nous appellerons *espace vectoriel physique (réel)* tout ensemble E , dont les éléments seront appelés *vecteurs* et notés $\vec{U}, \vec{V}, \dots$, muni de la structure algébrique définie par la donnée de B_1, B_2, B_3 , vérifiant (i), (ii), (iii), (iv) :

B_1 — Une application surjective de E dans $\mathbb{D}$

[qui donc affecte à chaque vecteur $\vec{U}$ de E une dimension physique, que nous noterons $D(\vec{U})$. L'ensemble des vecteurs de dimension physique D sera noté $E(D)$. Aucun des $E(D)$ n'est vide, et E est la réunion de tous ces $E(D)$. Les vecteurs de dimension 1 sont dits sans dimension]

B_2 — Une loi de groupe commutatif dans chaque $E(D)$

[cette loi est notée additivement, et son élément neutre est noté $\vec{0}_D$, ou 0 s'il n'y a aucune ambiguïté]

B_3 — Une loi de composition externe $\left| \begin{array}{l} R \times E \longrightarrow E \\ (d, \vec{U}) \longmapsto d\vec{U} \end{array} \right.$
[appelée produit par un scalaire].

(i) — Le produit vérifie l'équation aux dimensions :

$$D(d\vec{U}) = D(d) D(\vec{U})$$

(ii) — Il est associatif : $d(d'\vec{U}) = (dd')\vec{U} (= dd'\vec{U})$

(iii) — Il est distributif par rapport à l'addition dans chaque $E(D)$ et dans chaque $R(D)$.

(iv) — $(\sqrt[n]{\vec{U}}) \quad 1 \vec{U} = \vec{U}$

Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont dits parallèles s'ils sont linéairement dépendants, c'est-à-dire s'il existe deux scalaires physiques λ et μ tels que l'on ait $\lambda \vec{U} = \mu \vec{V}$ (λ et μ non nuls simultanément).

Commentaires :

On remarquera l'analogie avec l'axiomatique des espaces vectoriels classiques. On pourrait dire que E est un espace vectoriel sur le corps physique R , et on pourrait évidemment définir des espaces vectoriels sur un corps physique quelconque.

Dans le cas particulier où $\mathcal{D}$ ne contiendrait que l'élément neutre I , R serait identique à $\mathbb{R}$, E ne contiendrait que les vecteurs sans dimension, et la structure ci-dessus serait celle d'un espace vectoriel classique :

La structure d'espace vectoriel physique généralise celle d'espace vectoriel.

Enfin, on prendra garde que nous n'avons pour l'instant introduit que la structure vectorielle, celle qui nous permet par exemple d'écrire :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{V}}{dt} \text{ avec } \vec{F} \in E(MLT^{-2}), m \in R(M), \vec{V} \in E(LT^{-1}), t \in R(T)$$

Il conviendra de compléter ultérieurement cette structure pour pouvoir y faire des produits scalaires (pour les puissances par exemple) et vectoriels (pour les moments de force). Ce sera l'objet du paragraphe "Espaces vectoriels physiques euclidiens". Pour l'instant nous examinons quelques :

2 — Premières propriétés des espaces vectoriels physiques (E.V.P.)

On vérifiera aisément les propriétés ci-dessous :

a) — Tout $E(D)$ muni de sa loi de groupe et de la loi externe

$$\begin{aligned} R(I) \times E(D) &\longrightarrow E(D) \\ (k, \vec{U}) &\longmapsto k \vec{U} \end{aligned}$$

obtenue par restriction de celle de E , est un espace vectoriel réel ($R(I) = R$).

b) — Quels que soient $D \in \mathcal{D}$ et d non nul dans R , l'application

$$\begin{aligned} E(D) &\longrightarrow E(D(d) D) \\ \vec{U} &\longmapsto d \vec{U} \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel (d'inverse l'application $\vec{V} \mapsto d^{-1} \vec{V}$).

Deux quelconques des $E(D)$ peuvent ainsi être mis en correspondance, d'une infinité de façons (isomorphismes non canoniques). D'où :

c) — Si un des $E(D)$ est de dimension finie n , tous sont de dimension n ⁽¹⁾

Nous dirons alors que E est de dimension (mathématique) finie n . Nous nous limiterons dans la suite aux E.V.P. de dimension finie, encore que l'introduction du concept de dimension physique ne pose bien sûr aucun problème spécifique dans le cas de la dimension mathématique infinie.

d) — Si un système d'unités $\{\delta(D), D \in \mathcal{D}\}$ a été choisi dans R , pour tout couple (D, D') deux des isomorphismes de $E(D')$ sur $E(D)$ se trouvent privilégiés, à savoir :

$$\begin{aligned} 1/ - \text{L'application } \vec{U} &\longmapsto \delta(D D'^{-1}) \vec{U} \\ 2/ - \text{L'application } \vec{U} &\longmapsto \delta(D) \delta(D')^{-1} \vec{U} \end{aligned}$$

Si le système est cohérent, ces deux isomorphismes coïncident et, en les notant $i(D, D')$, on a :

$$i(D, D') \circ i(D', D'') = i(D, D'')$$

(1) On fera attention que le mot "dimension" est utilisé dans deux sens différents qui en aucun cas ne se réduisent l'un à l'autre.

e) — Soit $D_0 \in \mathcal{D}$, choisis quelconque. On a :

$$E = \{ \vec{U} \mid \vec{U} = d \vec{u}, d \in R, \vec{u} \in E(D_0) \}$$

et donc : E est engendré par un quelconque des $E(D)$.

Cette dernière propriété est assez parlante et sera utilisée par la suite. Le physicien sait d'ailleurs depuis longtemps qu'il obtient n'importe quel vecteur, force, moment magnétique, champ électrique en un point, etc..., en multipliant un vecteur déplacement $\vec{U}$ ($D_0 = L$) par un scalaire d ayant une dimension physique convenable, et qu'il obtient ainsi un vecteur $d\vec{U}$ parallèle à $\vec{U}$ et donc dont la direction et le sens sont des caractéristiques géométriques.

3 — Sous-espaces vectoriels physiques

Cette notion peut être développée dans deux directions (inclusif) :

a — Diminuer le nombre de dimensions physiques

Si $\bar{\mathcal{D}}$ est un sous-groupe de $\mathcal{D}$, par exemple le sous-groupe des dimensions cinématiques, les restrictions des lois de R à $\bar{R} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{D \in \bar{\mathcal{D}}} R(D)$ en font un sous-corps physique de R , et la restriction des lois d'un E.V.P. $E = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} E(D)$ à $\bar{E} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{D \in \bar{\mathcal{D}}} E(D)$ le dote d'une structure d'E.V.P. sur $\bar{R}$.

Ce point de vue n'est pas intéressant, dans la mesure où, cela peut être montré, tout E.V.P. (réel) dont le groupe des dimensions physiques est $\bar{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}$ peut être, canoniquement "élargi" en un E.V.P. dont le groupe est $\mathcal{D}$. Cette propriété justifie que nous fassions tout cet exposé en n'envisageant qu'un groupe de dimensions physiques, $\mathcal{D}$ (le plus gros). Nous n'étudierons donc pas ce type de sous E.V.P.

b — Diminuer le nombre de dimensions mathématiques

Soit $E = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} E(D)$ un E.V.P. réel, D_0 un élément de $\mathcal{D}$, et F un sous-espace vectoriel de $E(D_0)$. L'ensemble

$$F \stackrel{\text{déf}}{=} \{ \vec{U} \mid \vec{U} = d \vec{u}, d \in R, \vec{u} \in F \}$$

muni des lois obtenues par restriction de celles de E est un E.V.P. inclus dans E . C'est par définition un sous E.V.P. de E . On a évidemment :

$$F(D) = \{ \vec{U} \mid \vec{U} = d \vec{u}, d \in R(D D_0^{-1}), \vec{u} \in F \} = E(D) \cap F$$

Par exemple, si $D_0 = L$ et si F est un plan de l'espace vectoriel des vecteurs déplacement (dimension L), alors F est l'ensemble des vecteurs force, accélération, moment magnétique, etc..., parallèles à ce plan.

On pourra vérifier qu'une partie F de l'E.V.P. E est un sous-E.V.P. si et seulement si elle est stable pour la multiplication par un scalaire et telle que chaque $F(D)$ $\stackrel{\text{déf}}{=} F \cap E(D)$ soit stable pour l'addition.

L'intersection de deux sous-E.V.P. est un sous-E.V.P.

Les notions de sous-E.V.P. engendré par une partie de E et de sous-E.V.P. supplémentaires s'introduisent comme pour les espaces vectoriels classiques, et se ramènent d'ailleurs à ces cas classiques en utilisant la propriété e ci-dessus.

4 — Applications linéaires

a) — Définition

Soit E et F deux E.V.P. réels. Une application f de E dans F est dite linéaire si elle vérifie :

$$(i) (\forall \vec{U} \in E) (\forall \vec{V} \in E) : [D(\vec{U}) = D(\vec{V})] \Rightarrow [f(\vec{U} + \vec{V}) = f(\vec{U}) + f(\vec{V})]$$

(ce qui implique que $f(\vec{U})$ et $f(\vec{V})$ ont même dimension physique)

$$(ii) (\forall \vec{U} \in E) (\forall d \in R) : f(d \vec{U}) = d f(\vec{U})$$

b) — Quelques propriétés

① — Si $D = \{I\}$, alors E et F sont des E.V. et f est une application linéaire classique.

② — Si $d_1, d_2, \vec{U}_1$ et $\vec{U}_2$ sont tels que $D(d_1 \vec{U}_1) = D(d_2 \vec{U}_2)$, on a :

$$f(d_1 \vec{U}_1 + d_2 \vec{U}_2) = d_1 f(\vec{U}_1) + d_2 f(\vec{U}_2)$$

③ — E étant engendré par un $E(D)$ donné (cf. 2-e), toute application linéaire f de E dans F est caractérisée par sa restriction à un $E(D)$ donné, laquelle est une application linéaire classique de cet espace vectoriel $E(D)$ dans un des espaces vectoriels $F(D')$ de F .

④ — L'indice D' de cet $F(D')$ qui contient $f(E(D))$ ne dépend que de D . Nous le noterons $f[D]$. On a donc :

$$(\forall \vec{U}) \quad D(f(\vec{U})) = f[D(D(\vec{U}))]$$

L'équation aux dimensions de la relation (ii) ci-dessus s'écrit :

$$(\forall d) (\forall \vec{U}) \quad f[D(d) D(\vec{U})] = D(d) f[D(D(\vec{U}))]$$

d'où on déduit, en considérant des $\vec{U}$ sans dimension :

$$(\forall D) \quad f[D] = D f[I]$$

Une application linéaire f transforme donc un vecteur de E de dimension D en un vecteur de F de dimension $D f[I]$: elle multiplie la dimension par $f[I]$.

Nous noterons dorénavant $D(f)$ la dimension $f[I]$ et nous l'appellerons dimension physique de l'application f .

⑤ — Des propriétés ③ et ④ résulte immédiatement la généralisation des propriétés classiques des applications linéaires d'espaces vectoriels. En particulier :

- L'image $f(E)$ est un sous-E.V.P. de F
- Le noyau $\text{Ker } f = f^{-1}(\{0_D, D \in \mathcal{D}\})$ est un sous-E.V.P. de E
- $\dim(E) = \dim(f(E)) + \dim(\text{Ker}(f))$
- L'application réciproque d'une application linéaire, quand elle existe, est linéaire.

c) — Isomorphismes

Nous dirons que l'application linéaire f définie ci-dessus est un isomorphisme de E sur F si elle est inversible et si elle conserve la dimension physique, c'est-à-dire si sa dimension $D(f)$ est égale à 1.

Il en sera en particulier ainsi si sa restriction à $E(I)$ est un isomorphisme de cet espace vectoriel sur $F(I)$.

Deux E.V.P. ne peuvent être isomorphes que s'ils ont même dimension mathématique, et ils le sont alors d'une infinité de façons.

d) — L'espace vectoriel physique $\mathcal{L}(E, F)$

Soit E et F deux E.V.P. réels. Notant $L(D)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F de dimension D , et $\mathcal{L}$ la réunion des $L(D)$, on définit la somme de deux éléments de $\mathcal{L}(D)$ par la relation

$$(\forall \vec{U} \in E) : (f+g)(\vec{U}) = f(\vec{U}) + g(\vec{U})$$

et le produit de $d \in R$ par $f \in \mathcal{L}$ par la relation

$$(\forall \vec{U} \in E) : (df)(\vec{U}) = d(f(\vec{U}))$$

On vérifie que muni de ces lois, au demeurant tout à fait classiques, l'ensemble $\mathcal{L}$ des applications linéaires de E dans F , encore noté $\mathcal{L}(E, F)$, est un E.V.P. réel.

5 — Algèbre linéaire et multilinéaire

Il n'est pas question de réécrire ici tout ce chapitre des mathématiques dans le détail. Mais on peut prévoir des extensions immédiates des notions classiques dans le cadre de nos E.V.P. Par exemple :

a) — Après avoir remarqué que R est un E.V.P. sur lui-même (de dimension un), on définira le dual d'un E.V.P. E comme étant l'E.V.P. $E^* = \mathcal{L}(E, R)$.

Si U^* est un élément de E^* de dimension D , la restriction à $E(D^{-1})$ de U^* est un élément du dual (classique) $E(D^{-1})^*$ de $E(D^{-1})$, ce qui met en évidence l'existence d'un isomorphisme canonique entre $E^*(D)$ et $E(D^{-1})^*$.

b) — L'ensemble $\mathcal{L}(E, F; H)$ des applications bilinéaires de $E \times F$ dans H où E, F et H sont trois E.V.P. est un E.V.P.

Pour établir ce point on procédera comme pour les applications linéaires et on exhibera en particulier, pour toute application bilinéaire f , un $f[D_1, D_2]$ égal à $D_1 D_2 f[I, I]$

c) — L'E.V.P. $E \otimes F$ produit tensoriel de deux E.V.P. E et F sera formellement défini, exactement comme dans le cas classique, par factorisation des applications bilinéaires sur $E \times F$.

Pour tout E.V.P. H , l'isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F; H)$ et $\mathcal{L}(E \otimes F, H)$ sera entendu au sens des structures d'E.V.P., ce qui entraîne que le produit tensoriel de deux vecteurs vérifiera l'équation aux dimensions :

$$D(\vec{U} \otimes \vec{V}) = D(\vec{U}) D(\vec{V})$$

6 — Bases et orientation

Soit $\{\vec{U}_i\}$, $i = 1, \dots, p$ une famille finie d'éléments d'un E.V.P. E . Si les p scalaires λ_i sont tels que $D(\lambda_i)D(\vec{U}_i)$ soit indépendant de i , la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{U}_i$ a un sens.

Utilisant ces combinaisons linéaires, on définira, exactement comme pour les espaces vectoriels classiques, les familles libres ou génératrices et les bases de l'E.V.P. E .

On vérifiera aisément, en utilisant en particulier la propriété 2-e, que toute famille d'éléments d'un des espaces vectoriels $E(D)$ qui est, au sens classique, une famille libre ou génératrice ou une base de cet espace vectoriel, l'est aussi pour E .

Plus généralement, à toute famille $\{\vec{U}_i\}$ de E on peut, après choix d'une dimension D_0 et d'un système d'unités $\{\delta(D) | D \in \mathcal{D}\}$ quelconque, associer la famille d'éléments de $E(D_0)$ constituée des vecteurs $\frac{\delta(D_0)}{\delta(D(\vec{U}_i))} \vec{U}_i$ qui sera libre, génératrice ou base dans l'espace vectoriel $E(D_0)$ si et seulement si la première l'est dans E .

Les bases d'un E.V.P. de dimension n seront donc constituées de n vecteurs. Si $\{\vec{e}_i\}$ est une de ces bases, et si $\vec{U} = \sum_{i=1}^n U_i \vec{e}_i$, alors U_i a pour dimension physique $D(\vec{U})D(\vec{e}_i)^{-1}$. Si tous les vecteurs de la base ont même dimension D_0 , alors toutes les composantes d'un vecteur ont même dimension, et cette dimension est celle du vecteur lui-même si D_0 est égal à 1.

En physique, où les composantes d'un vecteur sont souvent considérées comme étant de même dimension que le vecteur lui-même, on utilise beaucoup de telles bases constituées de vecteurs sans dimension.

Le calcul matriciel s'adapte sans autre changement que quelques considérations sur les dimensions des coefficients familières au physicien. A titre d'exemple, si (f_{ij}) est la matrice dans une base $\{\vec{e}_i\}$ d'une application linéaire de E dans lui-même f , on a

$$f(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^n f_{ij} \vec{e}_j \text{ et donc } D(f) D(\vec{e}_i) = D(f_{ij}) D(\vec{e}_j)$$

Le coefficient f_{ij} a donc pour dimension physique $D(f) D(\vec{e}_i) D(\vec{e}_j)^{-1}$, et le déterminant de f a pour dimension $[D(f)]^n$.

L'orientation d'un E.V.P. peut être abordée directement, comme on le fait pour un E.V. Ne désirant pas nous engager dans l'étude des déterminants, nous procéderons autrement.

On peut remarquer que si chacun des E.V. $E(D)$ est orienté, le fait pour les isomorphismes $i(D, D')$ du paragraphe 2-d d'être ou non tous positifs est indépendant du système d'unités cohérent choisi.

Nous dirons que E est orienté si chaque $E(D)$ l'est et si les isomorphismes $i(D, D')$ sont tous positifs.

On vérifiera que l'on peut orienter E en orientant un quelconque, $E(D_0)$, de ses $E(D)$ et en transportant cette orientation sur les autres grâce aux $i(D, D_0)$, et qu'il n'y a que deux orientations possibles pour E .

Une base de E sera dite positive si ses vecteurs sont parallèles à ceux d'une base positive d'un des $E(D)$ et de même sens, et négative dans le cas contraire. Changer l'orientation de E change les bases positives en les bases négatives et inversement.

VI — ESPACE VECTORIEL PHYSIQUE EUCLIDIEN

1 — Définition

Nous appellerons *espace vectoriel physique euclidien* (E.V.P.E.) sur R tout E.V.P. sur R muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow R \\ (\vec{U}, \vec{V}) &\longmapsto \vec{U} \cdot \vec{V} \end{aligned}$$

bilinéaire, symétrique, définie positive (c'est-à-dire : $\vec{U} \cdot \vec{U} \in R^+$ et $\vec{U} \cdot \vec{U} = 0$ si $\vec{U} = 0$) et vérifiant en outre l'équation aux dimensions :

$$(i) \quad (\bigvee \vec{U}) (\bigvee \vec{V}) \quad D(\vec{U} \cdot \vec{V}) = D(\vec{U}) D(\vec{V})$$

Remarques

1 - Toute forme bilinéaire f vérifie une équation aux dimensions de la forme :

$$(\bigvee \vec{U}) (\bigvee \vec{V}) \quad D[f(\vec{U}, \vec{V})] = f[I, I] D(\vec{U}) D(\vec{V})$$

où $f[I, I]$ est un élément de D ne dépendant que de f . On peut donc remplacer dans l'axiome (i) $(\bigvee \vec{U}) (\bigvee \vec{V})$ par $(\exists \vec{U}) (\exists \vec{V})$ (axiome plus faible).

2 - Si $D = \{I\}$ on obtient un espace vectoriel euclidien classique.

2 -- Norme, orthogonalité, bases

a) -- De $D(\vec{U} \cdot \vec{U}) = \{D(\vec{U})\}^2$ et de $\vec{U} \cdot \vec{U} > 0$ on déduit l'existence pour tout $\vec{U}$ d'un réel positif de dimension $D(\vec{U})$, noté $\|\vec{U}\|$ et appelé *norme* de $\vec{U}$, tel que l'on ait $\vec{U} \cdot \vec{U} = \|\vec{U}\|^2$.

Un vecteur et sa norme ont donc même dimension physique.

Dans chaque $E(D)$, la norme vérifie les mêmes inégalités dites du triangle que dans le cas d'E.V. classiques.

b) -- Deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de E seront dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul. On en déduira les développements tout à fait classiques sur les sous-E.V.P. orthogonaux...

c) — Une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_i\}$ de l'E.V.P.E. E sera dite *orthogonale* si ses éléments sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si :

$$(i \neq j) \Rightarrow (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0)$$

Elle sera dite *ortho- δ -normée*, où δ est un réel physique strictement positif, si elle est orthogonale et si tous ses éléments ont pour norme δ , c'est-à-dire si :

$$(\forall i) (\forall j) \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \delta^2 \text{ avec } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

(ce qui implique que $\mathcal{B}$ est homogène de dimension $D(\delta)$).

Enfin, elle sera dite *orthonormée* si elle est ortho-1-normée, c'est-à-dire si elle est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien classique $E(I)$ (muni de la restriction du produit scalaire de E).

Dans une base ortho- δ -normée on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \left(\sum_{i=1}^n U^i V^i \right) \delta^2$$

et dans une base orthonormée on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \sum_{i=1}^n U^i V^i$$

(en désignant par U^i et V^i les composantes de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ respectivement).

3 -- Algèbre linéaire euclidienne

D'une façon générale, on retrouvera formellement tous les développements classiques, avec en outre quelques considérations sur les dimensions physiques. Citons par exemple :

a) — L'application $f(\vec{U})$:

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & R \\ \vec{V} & \longmapsto & \vec{U} \cdot \vec{V} \end{array}$$

est un élément du dual E^* de E , et l'application $f : \vec{U} \mapsto f(\vec{U})$ est un isomorphisme canonique de E sur son dual qui pourra être utilisé pour doter E^* d'une structure euclidienne ou pour l'identifier à E .

b) — En dimension 3, le produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ sera une application trilinéaire de E dans R , totalement antisymétrique, et égale à 1 si $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$ constituent une base orthonormée positive.

Quant au point vectoriel $\vec{U} \wedge \vec{V}$, il sera défini soit comme image réciproque par f de la forme linéaire $\vec{W} \mapsto (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$, soit plus élémentairement par la méthode "géométrique" classique où la relation

$$\|\vec{U} \wedge \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin \alpha \quad \text{sera lue dans } R.$$

VII. — CONCLUSION. L'ESPACE DU PHYSICIEN

La structure d'E.V.P.E. que nous venons de définir possède toutes les possibilités calculatoires que le physicien exploite en manipulant ses vecteurs. Il ne reste plus qu'à lui donner la dimension trois pour nous trouver dans l'univers vectoriel classique en physique, celui des vitesses, des quantités de mouvements, des puissances $\vec{F} \cdot \vec{V}$, des forces $m \vec{g}$ ou $q \vec{V} \wedge \vec{B}$, etc...

Pour faire le lien sur le plan spatial avec le paragraphe IV, il suffit de remarquer que la restriction à $E(L) \subset E$ du produit scalaire que nous venons de définir dans E est pour l'espace vectoriel $E(L)$ un L -produit scalaire au sens donné à cette expression au paragraphe IV. Le $E(L)$ de E jouera donc le rôle du E de ce paragraphe.

En définitive, l'arsenal mathématique du physicien classique comporte un groupe de dimensions $\mathcal{D}$, le corps physique des scalaires réels R , un espace vectoriel physique euclidien $E = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} E(D)$, et deux espaces affines : l'un de dimension un,

$\mathcal{G}$, dont l'espace vectoriel associé est $R(T)$ (espace vectoriel des durées) utilisé pour schématiser le temps, et l'autre de dimension trois, $\mathcal{E}$, dont l'espace vectoriel associé est le $E(L)$ de E , utilisé pour schématiser l'espace.

Nous avons donné ici une axiomatique de ces outils, pour des raisons déjà annoncées. Nous indiquons en annexe une méthode de construction qui est plus difficile sur le plan mathématique, mais qui est plus proche de la démarche du physicien. Cette construction privilégie un choix de dimensions fondamentales.

ANNEXE : CONSTRUCTION DE R ET DE E

a — Le physicien ayant fait choix des dimensions fondamentales L , M , et T (nous nous restreignons pour simplifier au groupe des dimensions mécaniques) est à la tête de trois espaces vectoriels de

dimension un sur $\mathbf{R}$ orientés : celui R_L des longueurs, celui R_M des masses, et celui R_T des durées, associés à l'espace affine des temps.

Notant R_L^* , R_M^* , R_T^* leurs duals et $\otimes$ le produit tensoriel, nous posons pour tout $(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3$:

$$\overset{m}{\otimes} R_L \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} R_L \otimes \dots \otimes R_L \text{ (m fois)} & \text{si } m > 0 \\ R & \text{si } m = 0 \\ R_L^* \otimes \dots \otimes R_L^* \text{ (-m fois)} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

$$\overset{n}{\otimes} R_M \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dots & \overset{p}{\otimes} R_T \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{cases} \dots \\ \dots \\ \dots \end{cases} \text{ (définitions analogues)} \end{cases}$$

$$K(L^m M^n T^p) \stackrel{\text{déf}}{=} (\overset{m}{\otimes} R_L) \otimes (\overset{n}{\otimes} R_M) \otimes (\overset{p}{\otimes} R_T)$$

$$\text{et enfin : } K = \bigcup_{(m, n, p) \in \mathbb{Z}^3} K(L^m M^n T^p)$$

Chaque $K(D)$ est un espace vectoriel de dimension un et donc possède une loi de groupe que nous prenons pour loi $+$. K vérifie alors les axiomes A_1 et A_2 . Pour loi produit nous choisissons le produit tensoriel contracté au maximum, que nous rappelons ci-dessous sur un exemple suffisamment explicite.

($\langle, \rangle$ désigne la dualité entre R_M et son dual)

$$d = l_1 \otimes l_2 \otimes m_1 \otimes m_2 \otimes m_3 \otimes t_1^* \in K(L^2 M^3 T^{-1})$$

$$d' = l_3 \otimes m_1^* \otimes m_2^* \otimes t_2^* \in K(L M^{-2} T^{-1})$$

$$dd' = \langle m_1^*, m_1 \rangle \langle m_2^*, m_2 \rangle l_1 \otimes l_2 \otimes l_3 \otimes m_3 \otimes t_1^* \otimes t_2^* \in K(L^3 M T^{-2})$$

Cette loi produit vérifie (ii) et (iii) et se confond avec la loi externe dans $K(D')$ si $d \in R = K(L^0 M^0 T^0)$ et $d' \in K(D')$

Si λ est un élément non nul de R_L et si $\bar{l}$ désigne la composante sur la base $|\lambda\rangle$ de $l \in R_L$, on a

$$l_1 \otimes l_2 = \bar{l}_1 \bar{l}_2 \lambda \otimes \lambda = l_2 \otimes l_1$$

d'où on déduit aisément que le produit est commutatif.

Enfin, à tout λ non nul dans R_L on peut associer l'élément $f_L(\lambda)$ de R_L^* qui associe à tout $l \in R_L$ sa composante $\bar{l}$ sur la base $|\lambda\rangle$.

On a en particulier :

$$(\forall \lambda \in R_L - \{0\}) \quad \langle f_L(\lambda), \lambda \rangle = 1$$

qui montre que tout λ non nul admet pour inverse $f_L(\lambda)$.

On en déduit aisément que tout élément de K non nul admet un inverse, après avoir remarqué que f_L est bijective de $R_L - \{0\}$ sur $R_L^* - \{0\}$.

Par exemple :

$$(l_1 \otimes l_2 \otimes m^* \otimes t)^{-1} = f_L(l_1) \otimes f_L(l_2) \otimes f_M^1(m^*) \otimes f_T(t)$$

Nous avons donc doté K d'une structure de corps physique sur $\mathcal{D}$.

Ce corps physique a été construit à l'aide des espaces vectoriels de dimension un sur R, R_L, R_M et R_T . Nous le noterons $R_L \otimes R_M \otimes R_T$.

On a évidemment :

$$K(L) = R_L, K(M) = R_M, K(T) = R_T \text{ et } K(I) = R :$$

notre K n'est autre que R avec choix d'une base privilégiée dans $\mathcal{D}$.

b — Lorsque l'espace affine euclidien $\mathcal{E}$, dont la distance est à valeurs dans R_L , a été choisi pour schématiser l'espace, le physicien dispose en outre de l'espace vectoriel E associé à $\mathcal{E}$, lequel est L -euclidien.

Posant :

$$E(L^m M^n T^p) \stackrel{\text{déf}}{=} K(L^{m-1} M^n T^p) \otimes E \quad \text{et} \quad E = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} E(L)$$

et choisissant en particulier comme produit d' $\vec{U}$, avec $d \in R$ et $\vec{U} \in E$, le produit tensoriel $d \otimes \vec{U}$ contracté au maximum, on vérifie aisément que E est un E.V.P., et que $E(L) = E$. Il suffit alors d'étendre à E le produit scalaire de E pour en faire un E.V.P.E.