La mathématique et la vie

par Mlle LOPATA - C.N.T.E., Vanves

La Réforme des contenus des programmes de mathématique de ces dernières années nous a déjà invités plus ou moins à rechercher dans nos cours des sujets d'application hors de la mathématique elle-même (ensembles, relations, statistique et probabilité, logique et informatique ...). Mais il faut noter qu'en France cet effort est encore très timide — presque "honteux" — l'ingéniosité de l'habillage dit "concret" se cachant trop souvent dans les exercices proposés en fin de chapitre. Car il s'agit presque toujours de concrétisation, d'application de modèles précédemment fournis par le cours — et non pas, en général, de construction systématique du cours par mathématisation à partir de situations.

Pourtant il ne faudrait pas oublier l'enseignement d'Archimède ! Intégrons donc la culture mathématique à notre activité tant intellectuelle que générale. Pour exposer nos cours, partons du concret (c'est-à-dire du connu, du familier) pour y revenir. Dans ce sens, citons le livre "Recyclons-nous en mathématique" de R. GRAS et J. P. GABORIEAU, où la base des programmes scolaires actuels est présentée pour le grand public (instituteurs, parents), "de l'exemple au problème" avec une majorité d'exercices de mathématique appliquée et la rédaction de la solution à la fin. Pourquoi ne pas considérer les élèves comme des adultes, en partant de leurs intérêts, de leurs problèmes — et en leur fournissant des exemples nombreux de recherche de solution ? Cette attitude naturelle dans l'enseignement élémentaire ou technique ne peut que vivifier l'enseignement dit "classique" — sans s'opposer à l'élégance du développement théorique.

Mais elle demande d'abord une enquête précise et approfondie sur les intérêts des jeunes, puis une étude scientifique des sujets, et enfin des mathématisations adéquates et suffisamment simples pour être suggérées aux élèves.

Nous avons toujours beaucoup à apprendre en ce sens de l'équipe animée avec enthousiasme depuis des années par Jean et Simone SAUVY, et qui publie dans les cahiers "*A*ctivités et *R*echerches *P*édagogiques (A.R.P. 27, avenue du 11 Novembre, 92190 Meudon, C.C.P. Paris 2611 — 84, Abonnement 20 F) une "mine" d'idées réellement vécues en classe avec des enfants jusqu'à 14 ans environ. Tout est à lire ... et c'est très amusant pour "petits et grands"; l'éducation manuelle et artistique figurant en bonne place parmi les différentes activités culturelles évoquées et où se trouvent aussi de nombreux jeux. Il y a aussi la remarquable collection publiée par l'IREM de Strasbourg par l'équipe animée par G. GLAESER : "Le livre du problème (CEDIC 72-73)".

Mais pour le second cycle et l'enseignement supérieur non spécialisé, nous manquons encore de documents.

Pourquoi nos manuels ne ressembleraient-ils pas un peu à une bonne revue d'initiation scientifique avec photos, graphiques, interviews, présentation de "vrais" problèmes faisant l'objet des recherches et des efforts de ceux qui ont accès au monde du travail — au monde des adultes en marge duquel nos élèves se sentent isolés ? Le premier souci des adolescents est : "Comment vivre au XXème siècle en France et plus généralement sur Terre ? ". Ils veulent rêver à leur avenir et aux moyens de le construire efficacement. Or c'est l'efficacité scientifique de la méthode mathématique qui est notre principal levier psychologique — le second étant le plaisir qu'il y a à jouer de la méthode en artiste.

Voici quelques domaines d'investigation pour lesquels nous commençons à avoir une documentation, et sur lesquels nous aimerions notamment avoir vos suggestions et développements (à adresser à Mlle LOPATA, 31 rue de Coulanges, 94370 Sucy-en-Brie).

A) Relations d'ordre, graphes, tableaux, combinatoire ... etc.

Elections (effet Condorcet, stratégie du désistement).

Plus généralement : *mathématiques des sciences humaines*. Lire ou relire les livres de M. BARBUT (aux P.U.F. ou chez Hachette) ou ceux de Th. GUILBAUD (aux P.U.F.) et la Revue "Mathématiques et Sciences Humaines" qui est diffusée par le service des revues Dunod — Gautier Villars, 26 Bd de l'Hôpital, 75005 Paris, Tél. 336.23.23, Abonnement 60 F — 10ème année compte-rendus de recherches et pédagogie (niveau Enseignement Supérieur).

Economie : Programmes de travail, d'études universitaires ; optimisation (ex : problème du voyageur de commerce).

Technologie : Programmes de fabrication.

Littérature : Construction simpliciale d'une pièce de théâtre (cf. "Six personnages en quête d'auteur" de L. PIRANDELLO).

Schéma de transfusion sanguine : voir plus loin la discussion.

Génétique : Passage des phénotypes aux génotypes (analyse des familles) ; vérification statistique de l'adéquation des modèles.

Urbanisme : problèmes de circulation, transports, aiguillages.

B) Combinatoire, statistique et probabilité

Physique atomique et nucléaire :

a) Statistique BOSE - EINSTEIN (un noyau, 2 électrons de spin $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, et n états du noyau pour chacun des électrons : modèle par couples de cases discernables à n "valeurs").

b) Statistique FERMI - DIRAC (un noyau, 2 photons non discernables, et n états du noyau pour chacun : modèle en "dominos", d'après J. M. DURRAN Statistics and Probability, S.M.P. Cambridge University Press).

Génétique : Le modèle en "dominos" s'applique notamment à la génétique (le père et la mère formant une paire et non un couple).

C) Géométries finies, combinatoire

Chorégraphie

Emplois du temps (organisation du travail, roulements ...).

Géométrie combinatoire : Lire et relire l'admirable "Mathématiques en Instantanés" de H. STEINHAUS (1ère édition française 1963 Flammarion).

Musique et architecture : par exemple "Musique Formelle" de Iannis XENAKIS (éditeur Richard Masse, Paris).

D) Algèbre linéaire, trigonométrie (à n dimensions)

Economie : Lire ou relire par exemple "Invitation à la Recherche Opérationnelle" de A. KAUFMANN et R. FAURE (Dunod 1966).

Démographie : L'avenir du Monde et son passé ; lapinisme, régulation, équilibres (chaînes de Markow).

Les groupes et la méthode expérimentale de repérage du fait scientifique (relativité des repères desservis par un groupe d'opérateurs) :

Voir : "La pensée scientifique moderne" de Jean ULLMO (édition 1969 Flammarion).
Plus généralement : "L'Algèbre Linéaire par ses Applications" de T. J. FLETCHER, adapté de l'anglais par M. et V. GLAYMANN (CEDIC 1972).

E) Informatique (théorique)

Informatique (physique) appliquée à *l'économie, la linguistique, la pédagogie* : enseignement programmé, enseignement assisté par ordinateur, docimologie.

Pour finir, et pour préciser le sens de notre effort de mathématisation, je voudrais prendre un exemple que nous avons commencé à discuter : celui de la transfusion sanguine. Cette partie est rédigée à la suite d'un travail d'équipe avec Mme MOLINE, professeur de Sciences Naturelles au C.N.T.E.

Notre collègue R. GRAS, de l'I.R.E.M. de Rennes, nous a proposé l'exemple de la transfusion sanguine comme illustration de la notion de simplexe.

Il faut rappeler que les hématies (globules rouges), contiennent des antigènes et le plasma des anticorps naturels (anticorps réguliers ou agglutinines). Lors d'une transfusion, les hématies du donneur se trouvent en contact avec les anticorps du plasma du receveur. (La petite quantité de plasma fournie par le sang du donneur n'a pas, comparativement à celle du receveur, d'importance : seuls les anticorps du receveur pourraient réagir sur les antigènes du donneur en cas d'incompatibilité). Dans la pratique de la transfusion, on opère toujours en "isogroupe" pour éviter les complications dans les transfusions ultérieures (par suite de la formation de nouveaux anticorps (anticorps irréguliers) dans le plasma du receveur). Voir schéma (fig. 1).

Les schémas proposés (fig. 2 et 3) sont des schémas de compatibilité pouvant être envisagés en cas d'urgence absolue.

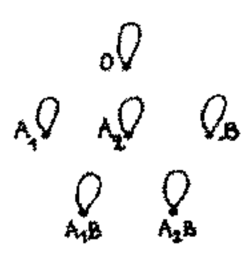

Fig. 1 Transfusions en "isogroupe"

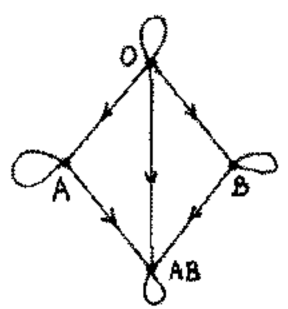

Fig. 2 "peut être transfusé à" ——→——

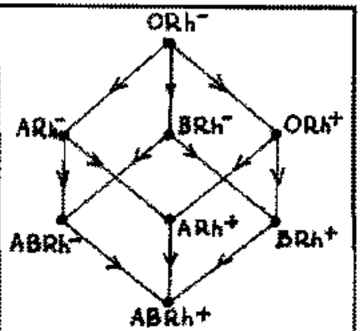

Fig. 3 "peut être transfusé à" ——→——

— La fig. 3 tient compte du facteur Rhésus. Aucun Rh^+ ne doit être donné à un Rh^-. Ceci entraînerait la formation d'anticorps irréguliers à l'origine d'accidents soit lors de transfusions ultérieures analogues, soit lors de grossesses quand le foetus est Rh positif.

— Pour la fig. 3, les flèches de transitivité et de réflexivité sont implicites.

Comme toujours, les modèles sont une simplification. On distingue depuis 1911 les sous-groupes A_1 et A_2 de A (depuis les travaux de DUNGERN et HERSZFELD). Les personnes du groupe A_1 peuvent recevoir du sang de celles du groupe A_2, mais celles du groupe A_2 possédant dans leur plasma un anticorps naturel anti-A_1 seulement dans 2 % des cas, il n'y a donc aucune réaction dans 98 % des cas (fig. 4).

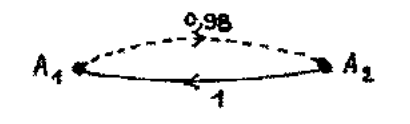

Fig. 4

En tenant compte de ces données et en les complétant, on obtient le schéma de la fig. 5 et le tableau de la fig. 6.

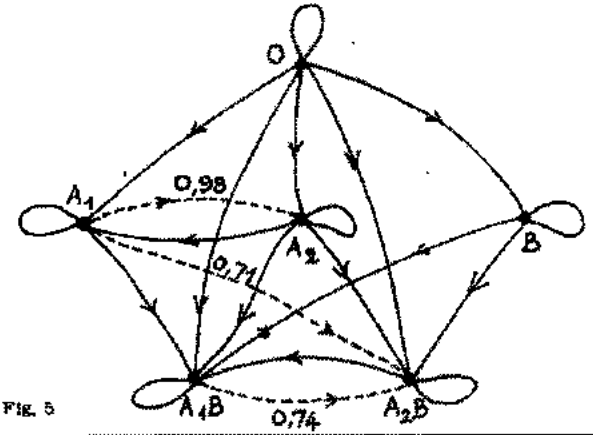

Fig. 5

Receveur

Donneur	O	A_1	A_2	B	A_1B	A_2B
O	1	1	1	1	1	1
A_1	0	1	0,98	0	1	0,71
A_2	0	1	1	0	1	1
B	0	0	0	1	1	1
A_1B	0	0	0	0	1	0,74
A_2B	0	0	0	0	1	1

Fig. 6

Par ailleurs la lecture de l'ouvrage "Les groupes sanguins chez l'homme" de R. R. RACE et R. SANGER, édition 1970 chez MASSON, est très éclairante en ce qui concerne la complication des notations. La découverte par VON DUNGERN et HERSZFELD des sous-groupes A_1 et A_2 a introduit un usage de notations parfaitement illogique (c'est-à-dire un langage non homomorphe au phénomène à décrire) dont on n'a pas encore réussi à s'évader (une réforme est à l'étude). Le problème, très simple à l'origine (en 1911), devient maintenant difficile par suite des usages en vigueur.

Notations déjà établies en 1911

Groupes sanguins	Antigènes des hématies	Anticorps naturels du même groupe
O	—	Anti-A et Anti-B (α) (β)
A	A	Anti-B (β)
B	B	Anti-A (α)
AB	A et B	Aucun

Elles sont cohérentes : il y a isomorphisme entre les deux premières colonnes (aucun inconvénient à désigner par la même lettre antigènes et groupes sanguins) — l'anticorps X agglutinant les hématies des personnes du groupe X contenant de l'antigène X.

Notations actuelles (déjà améliorées)

Groupes sanguins	Antigènes des hématies	Anticorps homologues
A_1	A A_1	Anti-A Anti-A_1
A		Anti-A
A_2	A	Anti-A_1

Le groupe A_1 est nommé par référence à l'antigène A_1 sans tenir compte de l'antigène A pris au sens le plus étroit. RACE et SANGER proposent d'utiliser pour les sous-groupes la lettre anglaise pour spécifier le sens étroit sur l'antigène A seul ou A_1 seul : $\mathcal{A}$nti-A, $\mathcal{A}$nti-A_1.

Groupes		Antigènes
$A = A_1 \cup A_2$	A_1	A_0 et A_1
$A_1 \cap A_2 = \phi$	A_2	A_0

Pour améliorer encore la situation en bousculant le moins possible les usages, il suffirait (presque) de distinguer l'antigène commun aux globules des groupes A_1 et A_2 par A_0 par exemple — afin de le différencier de A qui signifie une alternative avec ou sans présence de A_1. Le changement de notation est, paraît-il, à l'étude.

Pour éviter que se produisent de telles maladresses de langage, nous devons rendre le langage mathématique naturel à tous — et en particulier pour son usage en dehors d'une activité à objet mathématique.

Il apparaît ainsi possible d'élaborer un ou mieux plusieurs modèles avec des élèves à propos d'un "vrai" problème qui ne se présente pas uniquement comme un déguisement artificiel d'une notion d'un programme de mathématique (comme les bons vieux problèmes de "robinets" ou de "confitures"). Mais il faut que le professeur de mathématique ne s'aventure pas seul dans un domaine dont il ignore les difficultés — et le travail doit être mené avec des spécialistes, chacun s'efforçant de comprendre le langage des autres. Comme tout travail de recherche, cela demande une longue mise au point, et l'efficacité pédagogique pour chacun des sujets reste aléatoire. C'est pourquoi nous ne pouvons nous atteler à une telle méthode qu'en équipe, en commission A.P.M. par exemple. En classe, on ne peut trouver le temps de mener à bien beaucoup d'études de ce type.

Apprenons donc à nos élèves à construire des modèles, en face de "vrais" problèmes, à utiliser si nécessaire des machines et les méthodes de l'informatique lorsque l'étendue des données ou des calculs le demande — mais surtout apprenons-leur à ne pas utiliser ensuite ces modèles sans précaution. Ne formons plus des "matheux purs" qui se réfugient dans le monde idéalement simple de la mathématique pour fuir le réel. Et à propos des modèles mathématiques qui sont une simplification du réel, nous reprendrons la formulation de O. DUCROT (Revue LANGUE FRANÇAISE n° 12, décembre 71 "Linguistique et mathématiques") :

"L'inadéquation faisant la force principale des modèles, l'indiscipline est le secret de leur utilisation".