Un exemple de modèle mathématique dans un problème de sciences sociales

par L. MANGENEY, Paris

I Introduction

En recherchant des applications des mathématiques dans d'autres disciplines, je me suis intéressée à une étude faite par un économiste américain, K. Arrow (Prix Nobel 1973) et concernant un problème d'ordre social.

La formulation du problème et sa résolution mathématique sont très bien exposées dans le livre "*Games and decisions*" de "Luce et Raeffa".

Ce qui suit en est un résumé. Outre l'intérêt intrinsèque du problème, cette étude mathématique a l'avantage d'être assez simple pour être présentée à des élèves de seconde : ce que j'ai fait l'an dernier. Les élèves se sont intéressés au problème, mais c'était en fin d'année et nous n'avons pas eu le temps de l'approfondir.

Pour situer le problème, considérons l'exemple suivant : une famille de quatre personnes, le père, la mère, le fils, la fille, doit toucher 10 000 F tous les ans pendant trois ans. Ils envisagent d'acheter un bateau (prix 10 000 F), une voiture (prix 10 000 F) et des meubles (prix 10 000 F), mais ils ne savent pas dans quel ordre. Chaque membre de la famille classe ces objets dans un certain ordre de préférence. Le problème est de savoir quel va être le choix adopté par la famille compte tenu des préférences de chacun.

On peut se trouver, par exemple, dans le cas suivant :

Père	Mère	Fils	Fille
Meubles Bateau Voiture	Meubles Voiture Bateau	Voiture Bateau Meubles	Voiture Bateau Meubles

(ce qui signifie que le père préfère les meubles au bateau et le bateau à la voiture, etc ...).

On dira que le triplet (meubles, bateau, voiture) est "un *choix ordonné*", le triplet (voiture, bateau, meubles) en est un autre.

L'ensemble des quatre choix ordonnés ci-dessus forme "*un profil de choix ordonnés*" ou "*profil de préférence de la famille*".

Chaque individu a six façons différentes d'exprimer son "choix ordonné". Il y a donc en tout 6^4 profils de choix ordonnés possibles. Il peut être intéressant de décider, avant que chaque individu ait fait son choix, quel sera, pour chacun de ces profils, le choix ordonné correspondant de la famille.

La règle qui permet d'associer, à chaque profil de préférence, un choix ordonné pour la famille, constitue en quelque sorte une "*constitution*" pour la famille.

Sur l'exemple ci-dessus, on voit qu'il n'est pas facile de prévoir quel doit être le choix de la famille pour respecter au mieux les voeux de chacun de ses membres.

A ce type de problème, Arrow a donné la formulation mathématique qui suit. Il y a d'ailleurs plus d'un siècle que Condorcet (*) s'est penché sur les problèmes de décisions obtenues par vote, mais les travaux qu'il y a consacrés sont passés inaperçus.

II Définitions

Considérons une société composée de deux individus 1 et 2. Supposons que chacun d'eux soit placé devant deux alternatives possibles x et y : un individu peut préférer x à y ou préférer y à x, ou encore n'avoir aucune préférence entre x et y. Le premier cas, x

(*) *Voir, par exemple, l'article de Christian CORNE "Activités Socio-Mathématiques". Troisième Séminaire GALION, publié par la CÉDIC, 1973 (NDLR).*

préféré à y, est désigné par R_1, le deuxième cas, y *préféré à* x, est désigné par R_2 et le troisième cas (aucune préférence entre x et y) est désigné par R_3. On écrira :

R_1	R_2	R_3
x	y	x - y
y	x	

en mettant en première ligne l'alternative préférée

R_1 est un choix ordonné, de même R_2 et R_3.

Etant donné deux alternatives x et y, il y a seulement trois choix ordonnés possibles : R_1, R_2 ou R_3. $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, R_3\}$ est l'ensemble de ces choix. Il est intéressant, pour notre société à deux individus, de connaître le choix de l'individu 1 (R_1 par exemple) et le choix de l'individu 2 (R_3 par exemple) ; on résumera ces choix en disant que "le profil de préférence" de cette société est l'ensemble ordonné (R_1, R_3).

(R_1, R_3) est un élément de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ et chaque élément de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$ représente un profil de préférence possible pour une société à deux individus. Pour une telle société, il y a évidemment plusieurs profils de préférence possibles, par exemple (R_1, R_2), (R_2, R_1) etc ...

Résumons ci-dessous toutes les possibilités, la colonne 1 correspondant au choix de l'individu 1, la colonne 2 au choix de l'individu 2.

1	2	F_1	F_2	F_3	F_4
R_1	R_1	R_1	R_1	R_1	R_2
R_1	R_2	R_3	R_1	R_1	R_3
R_1	R_3	R_1	R_1	R_1	R_2
R_2	R_1	R_3	R_1	R_2	R_3
R_2	R_2	R_2	R_1	R_2	R_1
R_2	R_3	R_2	R_1	R_2	R_1
R_3	R_1	R_1	R_1	R_3	R_2
R_3	R_2	R_2	R_1	R_3	R_1
R_3	R_3	R_3	R_1	R_3	R_1

La troisième colonne F_1 permet d'associer, à chaque élément de $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, un élément de $\mathfrak{R}$. On peut dire que l'on a défini une sorte de "constitution de la petite société", constitution qui permet, par exemple, de décider que si l'individu 1 préfère y à x (R_2) et l'individu 2 n'a pas de préférence (R_3), alors le choix de la société sera (R_2).

La colonne F_2 représente un autre procédé possible pour passer des goûts des individus au choix de la société.

Ce procédé peut être considéré comme "*de droit divin*" puisque le choix de la société est toujours R_1 ; il ne dépend pas du choix des individus.

Dans la colonne F_3, le choix de la société dépend seulement du choix de l'individu 1 et non de celui de l'individu 2, on peut dire que la colonne F_3 correspond à une "*constitution dictatoriale*".

Quant à la colonne F_4, elle correspond à une constitution un peu spéciale, puisqu'elle mènerait la société à adopter, dans chaque cas, un choix qui n'est celui d'aucun des deux individus ; néanmoins c'est une constitution possible.

Dans chaque cas, la colonne F_i (F_1, F_2, F_3 ou F_4) permet de définir une application de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$. Il y a beaucoup d'autres applications de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$; il y en a exactement $3^9 = 19\,683$. La plupart de ces applications, telle F_4, correspondent à des "constitutions" plutôt déraisonnables et injustes.

Le problème est le suivant : qu'entend-on par "*constitution juste et raisonnable*" ? On appellera "*application juste*", une application qui définit une telle constitution.

On peut attendre, par exemple, d'une bonne constitution, que si tous les individus ont la même préférence, elle fasse adopter à la société cette préférence commune. Cela implique qu'au couple (R_1, R_1), l'application associe R_1, ce que l'on notera $(R_1, R_1) \mapsto R_1$. De même il faut $(R_2, R_2) \mapsto R_2$ et $(R_3, R_3) \mapsto R_3$.

Le nombre des applications de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$ satisfaisant à ces conditions est alors 3^6. Il ne paraît pas non plus raisonnable et juste qu'à (R_1, R_3) on associe R_2, comme dans F_4 par exemple.

On comprend donc que par des conditions raisonnables, telles que celles-ci, on élimine certaines applications de la catégorie des "*applications justes*". On reviendra plus loin sur ce point.

Considérons maintenant une société de trois personnes, chaque individu étant placé devant trois alternatives x, y, z. A est l'ensemble des alternatives : $A = \{x, y, z\}$. Pour chaque individu, les diverses attitudes possibles peuvent être :

R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9	R_{10}	R_{11}	R_{12}	R_{13}
x	x	y	y	z	z	x	y	z	x - y	x - z	y - z	x-y-z
y	z	x	z	x	y	y - z	x - z	x - y	z	y	x	
z	y	z	x	y	x							

Par exemple, si R_8 résume le choix d'un individu, cela signifie que cet individu préfère y à la fois à x et z et qu'il n'a pas de préférence entre x et z .

L'ensemble des choix individuels possibles est

$$\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_{13}\} .$$

Si, dans cette société à trois personnes, l'individu 1 préfère y à x et x à z , l'individu 2 préfère y à x et y à z et n'a aucune préférence entre x et z et si l'individu 3 préfère x à z et z à y , on résumera la situation en écrivant que le modèle de préférence est (R_3, R_8, R_2). Une application F de $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ vers $\mathcal{R}$ peut donc être interprétée comme un procédé pour passer des préférences individuelles à la préférence sociale.

III Formulation générale du problème

Au fur et à mesure que le nombre des alternatives et des individus augmente, il devient de plus en plus difficile de mettre en évidence tous les choix possibles pour un individu.

C'est pourquoi il est utile d'introduire la terminologie suivante :

1) $A = \{x, y, \dots, z\}$ est l'ensemble des alternatives ;

2) Les individus de la société sont notés "1, 2, ..., i, ..., n"

3) Etant donné un individu i et deux alternatives u et v , trois cas seulement sont possibles :

i préfère u à v , ce qui est noté $u \ \mathcal{P}_i \ v$, ou

i préfère v à u , ce qui est noté $v \ \mathcal{P}_i \ u$, ou enfin i n'a aucune préférence, ce qui sera noté $u \ I_i \ v$. Si i ne préfère pas v à u , on écrira $v \ \overline{\mathcal{P}}_i \ u$, c'est-à-dire que $v \ \overline{\mathcal{P}}_i \ u$ est équivalent à $u \ \mathcal{P}_i \ v$ ou $u \ I_i \ v$.

On a vu que, pour deux alternatives, il y a trois choix ordonnés possibles et que pour trois alternatives il y en a treize.

En général, soit $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, ..., R_m\}$ l'ensemble des choix ordonnés possibles ; m dépend du nombre des alternatives.

Dans la société à n individus, la situation suivante : l'individu 1 a le "choix ordonné" R_2, l'individu 2 a le "choix ordonné" R_4, l'individu j a le "choix ordonné" R_j, l'individu n a le "choix ordonné" R_n, est représentée par l'ensemble ordonné $(R_2, R_4, \dots, R_j, R_n)$; cet ensemble est appelé "un modèle de préférence" ou "un profil de choix ordonnés" de la société ; c'est un élément de $\mathcal{R}^n$.

4) On appelle "*application sociale*" ou "*constitution*" *une règle qui associe à chaque "profil de choix ordonnés"* (c'est-à-dire à chaque élément de $\mathcal{R}^n$) un choix ordonné pour la société elle-même. Si F est une telle application, on écrit

$$(R_1, R_2, \dots, R_n) \xrightarrow{F} R$$

Il y a de nombreuses applications de $\mathcal{R}^n$ vers $\mathcal{R}$. Cependant, si on interprète ce problème comme un problème social, il y a plusieurs conditions auxquelles une application doit satisfaire avant d'être considérée comme acceptable. Ces conditions sont des jugements de valeur subjectifs, mais il s'agit de les exprimer en termes mathématiques. Ensuite, il s'agit de voir si ces conditions permettent de définir, pour chaque profil de choix ordonnés, un choix ordonné pour la société. En effet, l'exemple suivant montre un problème pour lequel, étant donné une certaine contrainte, on ne peut pas trouver un choix ordonné pour la société, satisfaisant à cette contrainte.

Supposons que la contrainte est la règle de "*simple majorité*", c'est-à-dire que la société doit préférer "u à v" si et seulement si une majorité d'individus préfère u à v. Supposons que la société a trois individus et qu'il y a trois alternatives. Soit le profil de choix suivant de la société :

R_1	R_4	R_5
x	y	z
y	z	x
z	x	y

Les individus 1 et 3 "préfèrent x à y" donc, d'après la règle de simple majorité, il faut que la société préfère x à y, c'est-à-dire $x P y$; les individus 1 et 2 préfèrent y à z, donc il faut que la société préfère y à z ; les individus 2 et 3 préfèrent z à x donc il faut que la société préfère z à x . On ne sait donc pas quel choix de la société associer au profil (R_1 , R_4 , R_5) .

IV Etude de conditions

Le cas où il y a deux alternatives peut être simplement étudié. Dans la suite, nous allons nous intéresser à des situations où il y a au moins trois alternatives.

1) *Condition 1*

a) Le nombre d'alternatives dans A est supérieur ou égal à trois ;

b) A chaque profil possible est associé un choix ordonné pour la société ;

c) Il y a au moins deux individus dans la société.

2) Donnons un exemple pour introduire la deuxième solution. Soit une société ayant exactement trois membres ; il y a trois éventualités x, y, z . A = {x, y, z} . Considérons le profil de choix ordonnés suivant : (R_1 , R_{11} , R_{13}) :

R_1	R_{11}	R_{13}
x y z	x - z y	x - y - z

et supposons que la constitution définie par une application F_o est telle que pour le profil (R_1 , R_{11} , R_{13}) la société préfère y à z . Soit maintenant le profil (R_{10} , R_{11} , R_8)

R_{10}	R_{11}	R_8
x - y z	x - z y	y x - z

On remarque que l'on passe du profil (R_1 , R_{11} , R_{13}) au profil (R_{10} , R_{11} , R_8) en supposant que les individus 1 et 3 font monter y d'un rang dans leur choix, x et z étant fixés. Il semble donc raisonnable que F_o soit telle que si à (R_1 , R_{11} , R_{13}), elle associe un choix de la société où y est préféré à z , elle en fasse autant pour le profil (R_{10} , R_{11} , R_8).

Il serait en effet étonnant que quand les membres d'une société choisissent (R_1, R_{11}, R_{13}), la société préfère y à z, et que quand ils choisissent (R_{10}, R_{11}, R_4) où y est mieux placé, la société ne préfère pas y à z. C'est cette idée qu'exprime la condition 2.

Condition 2

Si une application sociale est telle que x est préféré à y pour un profil donné de préférences individuelles, il doit en être de même quand le profil est modifié de la manière suivante :

a) les comparaisons deux à deux entre des alternatives autres que y ne sont pas changées ;

b) chaque comparaison entre y et une autre alternative reste inchangée ou est modifiée en faveur de y.

3) Pour introduire la condition (3), considérons l'exemple suivant : un individu reçoit deux invités à dîner ; il veut leur servir du thé ou du café, mais pas les deux à la fois. Au lieu de demander à chacun s'il préfère le café ou le thé, il leur demande de classer des boissons dans un ordre de préférence.

Supposons que le "profil des préférences" des deux hôtes soit :

1er invité	2ème invité
Café	Thé
Bière	Café
Lait	Bière
Limonade	Lait
Chocolat	Limonade
Coca-Cola	Coca-Cola
Thé	Chocolat

L'individu pense alors qu'il doit servir du café, les autres boissons permettant d'apprécier les intensités relatives de préférence entre les deux boissons.

Mais si le profil de préférences est le suivant :

1er invité	2ème invité
Bière	Thé
Lait	Bière
Café	Coca-Cola
Thé	Limonade
Limonade	Chocolat
Chocolat	Lait
Coca-Cola	Café

il pense qu'il doit servir du thé, alors que, comme dans le profil précédent, le premier invité place le café avant le thé et le deuxième le thé avant le café.

On comprend le raisonnement de l'individu qui reçoit, mais ce raisonnement se discute car le premier profil peut traduire ceci : l'invité 1 aime à peu près toutes les boissons : café, bière, ... thé ; tandis que l'invité 2 adore le thé et déteste les autres : le café, la bière, etc ... C'est-à-dire que l'introduction des boissons autres que le thé et le café n'apporte pas de renseignements utiles et qu'il faut agir comme si les invités n'avaient classé que le café et le thé

1	2
Café	Thé
Thé	Café

et décider sans tenir compte des autres boissons. Il semble donc raisonnable d'imposer la condition suivante :

Condition 3

Si deux profils sont tels que les préférences entre x et y sont les mêmes dans les deux profils, l'attitude de la société devant x et y doit être la même dans les deux profils.

4) *Condition 4*

Pour chaque paire d'alternatives x et y, il existe au moins un profil de choix ordonnés tel que dans le choix ordonné correspondant de la société x est préféré à y.

Si la condition (4) n'était pas vérifiée, il existerait une paire d'alternatives (x, y) telle que x ne soit pas préféré à y , quelles que soient les préférences individuelles. La société imposerait donc le fait que x n'est pas préféré à y . Les citoyens n'exerceraient pas la souveraineté, et sur ce point au moins la souveraineté des citoyens serait limitée.

5) *Condition 5*

Il n'y a pas d'individu tel que, chaque fois qu'il préfère x à y (et ceci pour tout couple (x,y)) la société préfère aussi x à y, sans tenir compte des préférences des autres individus.

On peut résumer cette condition en disant qu'il n'y a pas de "dictateur" qui impose son choix à la société.

Le paradoxe d'Arrow s'exprime alors ainsi : *il n'existe pas d'application qui vérifie ces cinq conditions ; on montre plus exactement que, si une application satisfait aux conditions* (1), (2) et (3), *elle est imposée* (c'est-à-dire qu'elle ne vérifie pas la condition (4)) *ou bien elle est dictatoriale* (c'est-à-dire qu'elle ne vérifie pas la condition (5)).

V Démonstration du paradoxe d'Arrow

1) *Définition*

Un sous-ensemble V d'individus est dit "*décisif*" pour une paire d'alternatives (x, y) si, quand chacun des éléments de V préfère x à y , la société adopte le même choix pour x et y sans tenir compte de l'avis des membres qui ne sont pas dans V. En d'autres termes, on peut dire que si V est décisif pour (x, y), V est en quelque sorte une *coalition* qui impose à la société le choix de x avant celui de y , si c'est le choix de chacun des membres de V.

Définition : Un ensemble V est décisif pour (x, y) si, quand tous les membres de V préfèrent x à y , alors la société préfère x à y , quelles que soient les préférences des membres de la société qui n'appartiennent pas à V.

On en déduit, grâce à la condition (2), la propriété suivante :

Propriété 1

V est décisif pour (x, y) si et seulement si la société préfère x à y quand tous les membres de V préfèrent x à y et tous les autres individus préfèrent y à x.

En particulier, si V est décisif pour un couple (x, y), son complémentaire n'est pas décisif pour ce même couple.

2) *Principe de Pareto*

L'ensemble de tous les individus est décisif pour chaque paire (x, y), c'est-à-dire que si chaque individu préfère x à y, la société aussi.

Cela se démontre à partir des conditions (2) et (4). En effet, d'après la condition (4), il existe au moins un profil de préférences individuelles pour lequel la société préfère x à y. Or, dans un profil où tous les individus préfèrent x à y, on a modifié le précédent en faveur de x, donc, d'après la condition (2), la société doit encore placer x avant y.

3) *Paradoxe d'Arrow*

Introduisons la notion d'ensemble *décisif minimum*. V est un ensemble décisif minimum s'il existe un couple (x, y) pour lequel V est décisif et si aucun sous-ensemble strict de V n'est décisif pour aucun couple.

Un tel ensemble n'est pas vide, car son complémentaire, l'ensemble de tous les individus, ne serait pas décisif pour toute paire (x, y).

Nous allons montrer que V se réduit à une seule personne et que cette personne est décisive par rapport à tous les couples (x, y) et par conséquent se comporte comme un dictateur, contrairement à la condition 5.

V n'étant pas vide, soit j un individu appartenant à V, W l'ensemble des autres individus de V ($W = V - \{j\}$) et U l'ensemble de tous les individus qui n'appartiennent pas à V. Puisque la société a au moins deux individus, U et W ne sont pas tous les deux vides.

Soit z une troisième alternative ; considérons le profil de préférences suivant :

$\{j\}$	W	U
x	z	y
y	x	z
z	y	x

$V = \{j\} \cup W$ et V est décisif pour le couple (x, y), donc la société préfère x à y, c'est-à-dire $x\ P\ y$.

Si la société préférait z à y, W serait décisif pour le couple (z, y), mais comme W est un sous-ensemble de V, V ne serait pas l'ensemble décisif minimum.
Donc, la société ne préfère pas z à y, $z\ \overline{P}\ y$.
Par transitivité, $x\ P\ y$ et $z\ \overline{P}\ y$ implique $x\ P\ z$.

Mais j est le seul qui préfère x à z, donc $\{j\}$ est décisif pour le couple (x, z) (propriété 1). Or $\{j\}$ ne peut être un sous-ensemble strict de V, car V est un ensemble décisif minimum, donc $\{j\} = V$ et par hypothèse $\{j\}$ est décisif aussi pour le couple (x, y).

Donc $\{j\}$ est décisif pour les couples (x, y) et (x, z) quel que soit z.

Soit une autre alternative w. Il reste à montrer que $\{j\}$ est décisif pour (w, z) et (w, x).

Supposons $w \neq x$. Soit le profil :

$\{j\}$	u
w	z
x	w
z	x

D'après le principe de Pareto, $w\ P\ x$, et puisque $\{j\}$ est décisif pour (x, z), $x\ P\ z$. Par transitivité, $x\ P\ z$ et $w\ P\ x$ implique $w\ P\ z$. Soit maintenant l'autre profil

$\{j\}$	v
w	z
z	x
x	w

$\{j\}$ étant décisif pour (w, z), $w\ P\ z$ et $z\ P\ x$ d'après le principe de Pareto. Par transitivité, on en déduit $w\ P\ x$.

On a montré que $\{j\}$ est décisif pour tous les couples, donc j est un dictateur.

VI Conclusion

Nous venons donc de voir qu'une constitution qui satisfait aux axiomes 1 à 5 est nécessairement "*dictatoriale*".

Pour mettre sur pied une constitution plus *démocratique*, il faut donc modifier cet ensemble d'axiomes, ce qui réclame une étude plus fouillée qui dépasse le cadre restreint de cet article.

Ce qu'il me paraît important de souligner ici, c'est la démarche adoptée : à partir d'une situation concrète de la vie sociale, on élabore un modèle abstrait grâce auquel un raisonnement de nature "logique" permet de tirer des conclusions dont les conséquences pratiques n'échappent à personne.