

3

INTERDISCIPLINARITÉ

Bachelard... et l'enseignement des mathématiques

par HOURCADE (I.D.E.N., Saintes)

Opinion couramment exprimée : l'activité du mathématicien est analogue à celle de l'enfant créant des mathématiques nouvelles pour lui (Cf. notamment Wheeler).

Poussons jusqu'au bout la comparaison et nous aboutissons alors à la question : les obstacles rencontrés par l'enfant sont-ils de même nature que ceux que rencontre le mathématicien ? Il est difficile de répondre à cette question mais il est assez curieux de constater que les exemples d'obstacles évoqués ci-dessous ont été ressentis de façon analogue par des enfants, des adolescents et aussi par des adultes-enseignants en situation de "recyclage" ... Si ce fait se confirmait, cela donnerait à penser que l'épistémologie génétique de Piaget, bien que très utile pour la formation de l'enseignant en mathématique, est cependant insuffisante pour l'explication des difficultés rencontrées (puisque les réactions devant ces difficultés traversent les différents stades décrits par Piaget et se retrouvent même chez l'adulte sinon chez le mathématicien chercheur). On en vient donc tout naturellement à souhaiter, pour l'enseignant, une étude des obstacles à la connaissance mathématique. Et l'on peut s'étonner alors que la voie ouverte par Bachelard n'ait pas été exploitée dans l'enseignement des mathématiques. Il est vrai que c'est une voie difficile, peu fréquentée et que la conciliation avec l'épistémologie piagétienne n'est pas toujours chose facile.

On ne peut ici, dans le cadre d'un tel article, résumer (sans la déformer et se ridiculiser) l'oeuvre de Bachelard concernant la connaissance scientifique... On voudrait, tout simplement, en extraire quelques idées et montrer en quoi l'épistémologie bachelardienne peut être utile à l'enseignant de mathématiques pour lui expliquer certaines difficultés et certains blocages.

1 — *L'idée importante de rupture entre la connaissance commune et la connaissance scientifique.* Pour Bachelard, la "scientificité" se construit contre la connaissance commune et aussi contre l'immédiat, l'évident, l'intuitif (nous ne nous lancerons pas dans des considérations philosophiques pour distinguer l'intuition de l'évidence, imitant en cela Bachelard qui utilise souvent les deux mots de façon interchangeable).

2 — *L'idée que l'éducation est permanente, qu'elle n'est jamais achevée mais toujours continuée et à refaire.* C'est la notion capitale d'obstacle épistémologique qui constitue un arrêt de la connaissance et sous lequel il faut passer. La connaissance commune constitue le premier obstacle amenant la première rupture. Mais, par la suite, il en naît d'autres. Si bien que la connaissance ne peut procéder que par ruptures successives et par "destruction" des obstacles épistémologiques.

Une des conséquences de cette idée est la prédominance donnée à la "raison polémique" contre la "raison architectonique". La science ne peut se constituer qu'en "détruisant" les constructions antérieures qui feront place aux nouvelles (qui ne seront, de ce fait, que provisoires).

Une remarque : il serait trop long de développer ici comment, pour Bachelard, se constitue une connaissance à partir d'une connaissance déjà constituée. L'esprit ne peut pas faire "table rase", c'est donc dire que ce n'est jamais une destruction totale, c'est pourquoi nous utilisons le terme de destruction entre guillemets.

3 — *Idee corollaire de la précédente : la positivité de "l'erreur".* "Il n'y a pas de vérités premières, il n'y a que des erreurs premières" écrit Bachelard. Le savoir ne se constitue qu'en se rectifiant.

On pourrait exposer d'autres idées qui trouveraient ici leurs applications, à savoir la nécessité pour la science d'une problématique, l'importance de l'abstraction dans la pensée scientifique etc... Mais arrêtons-nous aux trois idées énoncées ci-dessus et voyons ce qu'elles donnent si on les confronte à l'enseignement des mathématiques (qu'il s'agisse d'enfants, d'adolescents ou d'adultes).

A) De l'opposition entre connaissance commune et connaissance mathématique :

Elle s'est trouvée confirmée par les attaques et les sarcasmes (Cf. "Canard Enchaîné", "Science et Vie") concernant la définition mathématique de la droite. Il est un fait que la droite mathématique a vraiment peu de rapports avec la droite de la connaissance commune ... car :

- il existe *plusieurs* droites mathématiques (en quatrième : la droite *euclidienne* et la droite *affine*) ;
- la droite n'est plus "droite" (Cf. les exemples donnés par les commentaires officiels) ;
- la "droite commune" sert de tremplin, d'aide à la construction de la droite mathématique ...

Si bien que l'affirmation ironique du "Canard Enchaîné" décrétant qu'il faut déjà être bien savant pour savoir ce qu'est une droite semble être une phrase du pur style bachelardien (mais en la prenant au mot c'est-à-dire en ôtant toute l'ironie du propos). Les attaques se sont axées sur cette définition de la droite, mais il aurait pu en être de même pour tout concept mathématique débordant sur la pensée commune.

B) Des obstacles épistémologiques :

Nous en citerons quelques-uns.

a) L'intuition, l'évidence, le donné, l'immédiat ... "*Les intuitions sont très utiles, elles servent à être détruites*" écrit Bachelard. On ressent le choc de cette idée contre les conceptions de beaucoup de pédagogues et de mathématiciens. Car, pour la plupart, les mathématiques doivent servir à confirmer l'intuition. Pourtant, certains ont, de l'intuition et de l'évidence, une idée voisine de celle de Bachelard :

— dans un article assez ancien du Bulletin de l'A.P.M. qui s'intitulait (si j'ai bonne mémoire !) "*L'évolution récente de la*

pédagogie des mathématiques", Georges Glaeser écrivait à peu près ceci : *"Ce qui est évident est le plus souvent faux"* (Phrase qui avait d'ailleurs été très contestée par M. Maurice Fréchet) ;

— dans un autre article intitulé : *"L'algèbre linéaire dans les mathématiques modernes"*, Jean Dieudonné exprimait une idée très voisine.

Donnons quelques exemples nous permettant de dénoncer les illusions de l'intuition et l'évidence :

α) Exemple donné par Wheeler.

"Mathématique à l'école élémentaire" : on place deux points sur un cercle et l'on trace le segment qui les joint. Le disque se trouve, de ce fait, partagé en deux régions. On place un troisième point sur le cercle et on trace tous les segments joignant ces points deux à deux ; le disque est ainsi partagé en quatre régions ... etc ...

On obtient ainsi :

Nombre de points	2	3	4	5	6
Nombre de régions	2	4	8	16	?

L'intuition nous pousse à donner 32 régions pour 6 points, or on peut constater qu'il n'y en a que 31 (*).

β) Exemple tiré d'un petit livre de Mme S. Goyard-Fabre (*L'esprit des mathématiques*).

L'auteur écrit : *"La spontanéité de l'intuition est dangereuse si rien ne vient la contrôler ou l'endiguer"* et elle cite un exemple de M. Boli : *"Les étapes des Mathématiques"* :

Soit un demi-cercle de diamètre $AB = 2R$; on trace dans le demi-



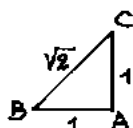
disque des demi-cercles ayant comme diamètre la moitié du diamètre précédent et ainsi de suite (voir figure) ... Que devient la longueur de la ligne constituée par les demi-cercles ? ...

"Qui ne penserait, à première vue, qu'à mesure que leur diamètre diminue la somme des petites demi-circonférences ainsi tracées tende vers la droite AB ?" écrit l'auteur. Or cette longueur est constante et égale à πR comme un calcul très simple permet de le vérifier.

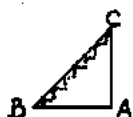
(*) Voir l'article de LECOQ, Bulletin APMEP n° 291, décembre 73. (NDLR)

7) Exemple très voisin du précédent.

Au cours d'une séance de recyclage où l'on étudiait la géométrie du télécran (jouet constitué d'un écran sur lequel on peut tracer des traits selon deux directions orthogonales, ceci à l'aide de deux boutons) ... Le problème était le suivant : les traits AB et AC étant tracés égaux à 1, la longueur BC mesure $\sqrt{2}$... Peut-on sur le télécran se rapprocher de $\sqrt{2}$, autrement dit existe-t-il pour aller de B en C un chemin plus court que $BAC = 2$?



Il semblerait que la réponse fût positive en essayant des solutions telles que celle-ci :



En réalité, il n'en est rien et la longueur de la ligne brisée est toujours égale à 2 ... Pour en être convaincu, il suffit de projeter les différents petits segments sur AB et sur AC.

L'intuition à l'appui de la connaissance ou la connaissance se constituant contre l'intuition ? Qu'en est-il de ces deux conceptions dans la pratique de la classe ? (il s'agit, ici, d'observations effectuées dans les classes correspondant à la scolarité obligatoire).

— On peut constater que lorsque "l'intuition est trompeuse", cela constitue un excitant pour l'esprit ... De là vient le succès, auprès des élèves, des jeux et des paradoxes mathématiques qui sont un défi à l'intuition (Cf. Notamment : Northrop : "Fantaisies et paradoxes mathématiques"). De même, l'exemple 7) ci-dessus (télécran) peut contribuer à motiver une séance de "recyclage" sur la notion de distance (voir plus loin).

— Au contraire, lorsque l'intuition se révèle exacte, elle apparaît à l'élève comme suffisante et il ne comprend pas la nécessité de la doubler par le discours mathématique ... Se pose, ici, le fameux problème de la "motivation" de la démonstration géométrique en classe de quatrième : démontrer, à partir de certaines propriétés choisies pour axiomes, d'autres propriétés

(qui, pour lui, ne sont trop souvent ni plus ni moins évidentes que les premières) est un exercice de peu d'intérêt pour le jeune adolescent ... Et ce ne sont pas des considérations pseudo-philosophiques sur la notion de modèle et sur le rapport entre modèle et situation qui l'exciteront davantage. Il semble là que l'on soit beaucoup plus dans "l'architectonique" que dans "le polémique". Or, pour exciter l'esprit de l'élève, la mathématique devrait toujours être une problématique (Glæser et Lehmann l'ont bien souligné dans leurs exposés à la Société Mathématique de France) ... c'est-à-dire que faire des mathématiques devrait signifier, pour l'enfant et l'adolescent, se poser et résoudre des problèmes ... Comme l'écrit A. Revuz dans : "Mathématique moderne, mathématique vivante", *la mathématique est action et non contemplation* (ni description, oserions-nous ajouter, étant donné l'âge des élèves qui nous intéressent) et il parle de *l'agressivité de la pensée à l'égard des problèmes à résoudre, retrouvant ainsi un vocabulaire à consonances bachelardiennes* (Cf. "une certaine méchanceté de la raison"). Problématiser le programme n'est pas, pour l'enseignant, chose toujours facile mais cela évite cette question accablante que peut poser l'élève ; "ce que je fais, cela sert à quoi ?" ...

b) Autre obstacle épistémologique : les connaissances antérieures lorsqu'elles sont mal constituées, fermées trop tôt sur des automatismes incompris ...

Exemple de test donné en quatrième et aussi à un groupe d'enseignants de l'école élémentaire :

1ère question : quarante neuf s'écrit 49 en base dix ; 61 en base huit, 61 (en base huit) est-il un nombre premier, est-il un carré ?

2ème question : vingt-un s'écrit 21 en base dix, 41 en base cinq, 41 (base cinq) est-il un nombre premier ? Quels sont ses diviseurs ?

Un bon nombre d'élèves se sont trompés (presque toujours, aux deux questions d'ailleurs) et il y a eu beaucoup d'hésitations chez certains enseignants ...

Ce qui prouve que le nombre est assimilé à son écriture en base dix, et ce qui plaide en faveur de l'introduction de l'écriture d'un nombre dans différentes bases très tôt dans l'enseignement élémentaire.

Autre exemple : la notion de distance pour des adultes en "recyclage" (voir plus loin).

c) Troisième obstacle épistémologique : le vocabulaire :

— On fait dire aux mots plus qu'ils ne veulent dire ... Beaucoup de mots mathématiques sont des mots importés du langage courant. Mais le mot emporte avec lui tout un halo de connotations qui varie d'un élève à l'autre. C'est ainsi que Bachelard écrit : "*Le vocabulaire doit être désintuitionné, dégéométrisé, psychanalysé*" ... Nous avons vu ce qu'il en était dans l'exemple de la droite ... On pourrait dire la même chose du plan, etc ... Ceci rejoint sur le plan du langage la première remarque concernant l'opposition entre connaissance commune et connaissance mathématique, qui se traduit ici par l'opposition vocabulaire courant et vocabulaire mathématique.

— Il en est de même des définitions : il est frappant de constater que l'enfant, l'adolescent (et même l'adulte) a beaucoup de mal à se servir correctement d'une définition. Ceci semble provenir du fait que, trop souvent, on tire une définition d'une situation particulière. Puis, chaque fois que l'on utilise cette définition, on l'utilise dans la situation dont elle est issue. Expliquons-nous sur un exemple plusieurs fois évoqué : il s'agit de la définition de la distance. — On définit une distance sur la droite, puis dans le plan, mais il s'agit toujours de la distance que d'aucuns appellent *naturelle*, d'autres *euclidienne*. Après quoi, on donne la définition d'une distance sur un ensemble E comme une application de E^2 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant les axiomes de séparation, de symétrie et l'inégalité triangulaire. Mais cette définition se trouve liée à la seule image de la distance euclidienne, si bien que, pour l'élève, il y a une distance et une seule. La définition ne devrait venir qu'après la "manipulation" de plusieurs distances (Cf. Document de Lyon concernant la formation continue ou tome III du cours de l'A.P.M. par A. et G. Revuz).

Si, au niveau du premier cycle, cela semble impossible (faute de temps !!!) on devrait alors, après la définition, utiliser cette dernière pour montrer qu'il existe plusieurs distances (en séance de travail dirigé, par exemple) ... Il serait peut-être bon aussi d'utiliser cette notion de distance sous différentes formes. Nous voulons dire, par là, que, par exemple, le cercle étant défini à partir de la distance, l'on pourrait construire les cercles correspondant à différentes distances ... et se rendre compte que certains ne sont pas "ronds". — L'idée qui devrait sous-tendre cette démarche pédagogique, c'est qu'à une situation donnée on peut faire correspondre plusieurs modèles (et ceci est la démarche même des

commentaires officiels : modèle euclidien, modèle affine) ... Et inversement, un modèle peut se réaliser dans plusieurs situations ...

d) Quatrième obstacle : le verbalisme.

Pour Bachelard, un mot n'est pas un concept. De même que l'absence du mot n'implique pas nécessairement celle du concept. Ceci devrait être médité par ceux qui veulent que "les mathématiques modernes" ne soient que du vocabulaire. Le mot ne devrait venir que si (et quand) on a besoin de lui, c'est-à-dire quand on doit utiliser le concept correspondant. On n'aurait donc que les mots désignant les concepts utiles, c'est-à-dire servant souvent ...

e) Autre obstacle : les images.

On ne peut, ici, développer tout ce que Bachelard a dit sur les images, sur ce que sont les bonnes images et les mauvaises : "*celles qui poussent à une pensée autonome*".

Et pourtant une telle étude des images à la lumière des conceptions bachelardiennes serait certainement très utile à l'enseignant car la pédagogie est une grande consommatrice d'images (et surtout la pédagogie des mathématiques).

Conclusion

Ce qui précède ne mène pas bien loin mais cela permet de poser un certain nombre de questions dont la réponse pourrait aider (peut-être ?) le pédagogue dans la pratique de la classe :

1 — La notion d'obstacle, dans l'enseignement des mathématiques, doit-elle se rattacher autant (davantage, moins) aux mathématiques et à leur épistémologie qu'à la psychologie du sujet ?

2 — Quel rôle doit jouer "l'intuition" dans cet enseignement ? dans le même ordre d'idée, quel rôle doit jouer l'évidence ? ... Et comment amener l'enfant (l'adolescent) à éprouver la nécessité de "doubler" l'évidence par le discours mathématique ?

3 — Quel rôle doivent jouer les images dans la pédagogie des mathématiques ?

Et beaucoup d'autres questions encore, peut-être plus essentielles (mais que nous ne pouvons développer), notamment :

— Que peuvent donner, en mathématiques, les idées impliquées dans la "philosophie du non" ?

— Comment appliquer à chaque concept mathématique la notion de "profil épistémologique" ? etc ... etc ...

Bulletin de l'APMEP n°293 - Avril 1974

On a, bien sûr, donné des réponses à certaines de ces questions, mais très souvent dans une perspective uniquement psychologique. Peut-être pourrait-on (ré) examiner ces questions et ces réponses à la lumière de l'épistémologie bachelardienne ? Il semble que la question méritait d'être posée.