

"Restriction", "Ensemble" et divers

- Un remède à la suraccumulation des définitions dans les cours d'analyse du second cycle : les restrictions
- Un mot sous-employé en analyse : ensemble
- Et diverses remarques

par A. GOURET (Lyon)

(après discussion avec des collègues du second cycle)

I Plusieurs ouvrages scolaires, de large diffusion, donnent des définitions, à priori indépendantes, pour :

limite, limite à droite, limite à gauche, continuité, continuité à droite, continuité à gauche, dérivabilité, dérivabilité à droite, dérivabilité à gauche, d'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ces définitions sont en général explicitées à l'aide de quantificateurs et ne diffèrent que par des détails d'écriture qui, bien que lourds de conséquences, peuvent être mal mémorisés par des élèves moyens.

Il s'agit souvent de " $0 < |x - x_0| < \alpha$ " remplacé par " $0 < x - x_0 < \alpha$ " ou par " $0 < x_0 - x < \alpha$ ".

En fait, pour les questions évoquées par les neuf définitions précédentes, on peut se limiter à trois notions : limite, continuité, dérivabilité.

Par ailleurs, dans l'exposé théorique on peut se contenter de considérer des applications. En effet, lorsqu'une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est donnée,

ou bien l'ensemble de définition est $\mathbb{R}$ et alors la fonction est une *application*,

ou bien l'ensemble de définition est un sous-ensemble propre de $\mathbb{R}$ et l'étude *effective* se rapporte à une application dont la source est ce sous-ensemble.

Donnée. Dans la suite, E désigne un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, f une application de E vers $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de E .

Définition (1)

F étant un sous-ensemble de E , on appelle restriction de f à F l'application, g , de F vers $\mathbb{R}$, définie par $g(x) = f(x)$ pour tout réel x de F .

g est notée en général : $f|F$.

En particulier : on peut associer à f l'application g_1 où

$$g_1 = f|(E \cap [x_0, +\infty[)$$

(on ne garde donc, des points de la source de f , que ceux qui sont "à droite" de x_0).

On considérera aussi l'application g_2 où $g_2 = f|(E \cap [x_0, -\infty[)$ (on ne garde que les points de la source de f situés "à gauche" de x_0).

Définition ②

J désignant l'ensemble des intervalles *ouverts* de centre x_0 (intervalles du type $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ où α est réel positif),

$\mathcal{K}$ désignant l'ensemble des intervalles *ouverts* de centre $f(x_0)$,

" f est continue en x_0 " signifie "à tout intervalle H , élément de $\mathcal{K}$, correspond au moins un intervalle I élément de J tel que $f(I \cap E) \subset H$ ".

Cette définition peut être traduite avec des quantificateurs, surtout (mais peut-être, uniquement) si on se propose de nier la continuité.

$$\forall_{\mathcal{K}} H, \quad \exists_J I, \quad f(I \cap E) \subset H$$

ou en détaillant davantage :

$$\forall_{R_*^+} \epsilon, \exists_{R_*^+} \forall_E x, (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Voilà la seule notion de base du chapitre "continuité".

f étant donnée, il est loisible de se demander si, dans telle ou telle hypothèse, l'application g_1 (notation précédente) est *continue*.

Définition ③

On dit que f est "*continue à droite en x_0* " si et seulement si g_1 est continue en x_0 .

Il s'agit là d'un jargon que l'on peut juger utile mais qui ne véhicule pas d'idée nouvelle par rapport à celle de la définition

②.

Remarquons la contraction de :

" la restriction de f à la partie de la source située à droite de x_0 est continue en x_0 "

en

" f est continue en x_0 à droite "

On peut alors expliciter ③ à l'aide d'intervalles, de quantificateurs. Mais il s'agit d'un simple exercice de traduction et d'application de ② et non d'une nouvelle définition à apprendre.

II Ensemble : mot sous-employé en analyse

On rencontre souvent l'expression suivante :

" f étant une application de E , sous-ensemble de R , vers R , et F un sous-ensemble de E , f est continue sur F ".

Parfois, l'auteur veut dire que f est continue en tous les éléments de F au moins, parfois que f n'est continue qu'en les éléments de F .

Pour lever cette ambiguïté, il suffit d'introduire l'expression "ensemble de continuité de f ", ensemble des points en lesquels f est continue (notation C), et de préciser :

ou bien : l'ensemble de continuité inclut F ($C \supset F$)

ou bien : l'ensemble de continuité égale F ($C = F$)

Remarque analogue pour "dérivable sur" : l'ambiguïté se lève en employant la notion d'ensemble de dérivabilité.

Dans le même ordre d'idées, pourquoi parler de domaine de définition, champ de définition, lorsqu'on veut seulement parler d'ensemble ? Il y a à cela des raisons historiques ; mais ces deux mots ayant pris des sens précis dans d'autres ... domaines de l'analyse, il vaut mieux les éviter comme synonymes d'ensemble.

III Restriction et ensemble de continuité pour éliminer une définition discutable

Reprenons l'expression " f est continue sur F " dans le cas particulier où F est un segment : $F = [a, b]$.

Comme il est dit plus haut, " f est continue sur $[a, b]$ " peut avoir deux sens.

Mais dans les deux cas (que l'ensemble de continuité de f inclue ou égale $[a, b]$), cela exige la continuité de f en a et en b .

Or, pour certains auteurs de manuels, f étant une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, a et b deux réels ($a < b$), " f est continue sur $[a,b]$ " signifie que f est continue pour tout élément de $]a,b[$, continue à droite en a , continue à gauche en b .

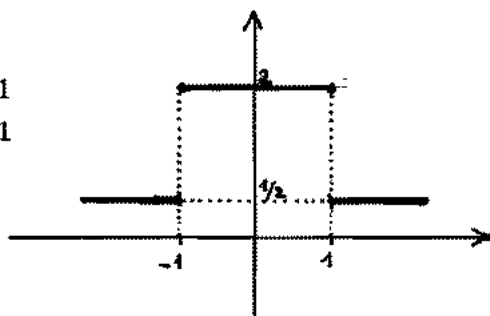
Cela ne rentre pas dans le cadre de la définition générale de la "continuité sur un sous-ensemble de la source". Pour éviter les contradictions, ces auteurs, en général, définissent *séparément* "continuité sur un segment", "continuité sur un intervalle ouvert", "continuité sur un intervalle semi-ouvert" ... etc ... ; de quoi noyer les élèves bien inutilement.

En fait, si l'on tient à exprimer que " f est continue en tous les éléments de $]a,b[$, continue à droite en a , à gauche en b ", il suffit de dire "l'application $f|_{[a,b]}$, restriction de f à $[a,b]$, est continue".

("g est une application continue" signifie "l'ensemble de continuité de g est la source de g")

Exemple :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1/2 & \text{si } |x| > 1 \\ x \mapsto 2 & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$$



L'ensemble de continuité de f n'inclut pas

$[-1, +1]$, il inclut par contre $] -1, +1[$

mais $f|_{[-1, +1]}$ a pour ensemble de continuité $[-1, +1]$.

La notion d'ensemble de continuité est utile lorsqu'on utilise le théorème sur les applications composées. Ce théorème n'est qu'une condition suffisante de continuité de $f \circ g$; son emploi se traduit par une inclusion entre l'ensemble des réels en lesquels on peut l'appliquer et l'ensemble de continuité de $f \circ g$.

Bulletin de l'APMEP n°293 - Avril 1974

L'usage systématique des restrictions et des ensembles de continuité (de dérivabilité) permet à l'élève une meilleure compréhension et soulage sa mémoire, du moins je le crois. Qu'en pensez-vous ?