Sur quelques "erreurs" d'arrondi

par A. WARUSFEL

I Soit A et x_0 des nombres réels strictement positifs. La suite récurrente définie par

$$\boxed{x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right)}$$

est telle que $x_{n+1}^2 - A = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{A}{x_n}\right)^2$ et que $x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2x_n}(x_n^2 - A)$; elle est donc décroissante à partir du second terme au moins, et converge vers une limite λ telle que

$$0 < \lambda = \frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{A}{\lambda}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_n \to \sqrt{A} + 0}$$

II Si nous étudions cette suite sur une machine qui ne connaît que les nombres entiers, celle-ci produira une suite légèrement différente, définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \ , \ f(x) = E\left(\frac{1}{2}\left(x + E\left(\frac{A}{x}\right)\right)\right)$$

où E représente la partie entière.

Il est intéressant d'essayer de déterminer les couples (A, x_0) pour lesquels x_n converge vers l'entier $\omega = E(\sqrt{A})$. A et x_0 seront supposés entiers.

III Soit x un entier non nul.

$$\omega \leqslant \sqrt{A} \Rightarrow A \geqslant \omega^2 \Rightarrow A \geqslant \omega^2 - (x-\omega)^2 = x(2\omega - x)$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} \geqslant 2\omega - x \Rightarrow E(\frac{A}{x}) \geqslant 2\omega - x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + E(\frac{A}{x})\right) \geqslant \omega \Rightarrow f(x) \geqslant E(\omega) = \omega$$

$$\boxed{x \in N^* \Rightarrow f(x) \geqslant \omega} \qquad (1)$$

Si $x > \omega$, nous avons :

$$\sqrt{A} < \omega + 1 \Rightarrow A < (\omega+1)^2 \leqslant (\omega+1)\,x$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} < \omega + 1 \Rightarrow E(\frac{A}{x}) \leqslant \omega$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(x + E(\frac{A}{x})\right) \leqslant \frac{1}{2}(x+\omega) < x$$

$$\Rightarrow f(x) \leqslant x - 1$$

$$\boxed{x \in N^* \text{ et } x > \omega \Rightarrow f(x) \leqslant x - 1} \qquad (2)$$

IV (1) montre que $x_n \geqslant \omega$ pour $n \geqslant 1$. Si $x_n \neq \omega$, alors la relation (2) montre qu'il existe un indice $p \geqslant n$ tel que $x_p = \omega$. Nous devons donc calculer $f(\omega)$.

Supposons d'abord qu'il existe un entier strictement positif a tel que $\boxed{A = a\,(a+2)}$. Alors :

$$a^2 < A < (a+1)^2 \Rightarrow \omega = a$$

$$\omega + 2 = a + 2 = \frac{A}{a} = \frac{A}{\omega}. \text{ Par suite :}$$

$$f(\omega) = E\left(\frac{1}{2}\left(\omega + E(\frac{A}{\omega})\right)\right) = E\left(\frac{1}{2}(\omega + \omega + 2)\right) = \omega + 1$$

$$f(\omega+1) \in [\omega, \omega+1-1]$$

d'après (1) et (2), on a :

$$f(\omega) = \omega + 1 \quad , \quad f(\omega + 1) = \omega.$$

La suite oscille, à partir d'une certaine valeur de n, entre les valeurs $E(\sqrt{a})$ et $E(\sqrt{a} + 1)$.

V **Exemple :** $a = 3$, $A = 15$.

n	0	1	2	3	4	5	...
x_n	1	8	4	3	4	3	...

n	0	1	2	3	4	5	...
x_n	9	5	4	3	4	3	...

VI Supposons au contraire qu'il n'existe aucun entier tel que $A = a(a+2)$ (c'est-à-dire $A + 1$ n'est pas un carré parfait). Alors :

$$\omega^2 \leqslant A < (\omega+1)^2 \Rightarrow \omega^2 \leqslant A \leqslant \omega^2 + 2\omega$$

$$\Rightarrow \omega^2 \leqslant A < \omega(\omega+2) \Rightarrow \omega \leqslant \frac{A}{\omega} < \omega + 2$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{A}{\omega}\right) \in \left\{\omega, \omega+1\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\omega + E\left(\frac{A}{\omega}\right)\right) \in \left\{\omega, \omega + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow f(\omega) = \omega .$$

La suite converge alors vers $\omega = E(\sqrt{A})$ en étant constante au-delà d'un certain rang (une condition nécessaire et suffisante est que $\boxed{A + 1 \text{ ne soit pas carré parfait}}$). Le choix de x_0 n'influe pas sur la nature de la suite.

VII **Exemple :** $A = 10$

n	0	1	2	3	4	...
x_n	1	5	3	3	3	...

VIII Soit $x > A$: alors $f(x) = E\left(\frac{1}{2}(x+0)\right) = E\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{x}{2}$.

Si $x_0 > A$, on a donc $x_1 \leqslant \frac{x_0}{2}$, d'où l'existence d'un indice $k \geqslant 1$ tel que :

$$x_k \leqslant A < x_{k-1} \leqslant \frac{x_0}{2^{k-1}}$$

soit $2^{k-1} < \frac{x_0}{A}$, $k - 1 < \log_2 \frac{x_0}{A}$, $k \leqslant E(\log_2 \frac{x_0}{A}) + 1$.

Quel que soit x_0, il existe donc un nombre k tel que

$$\omega \leqslant x_k \leqslant A .$$

Si $x_o > A$, k est lié par la relation précédente ;
si $\omega \leqslant x_o \leqslant A$, on prendra $k = 0$;
si $x_o < \omega$ et si $x_1 \leqslant A$, on prendra $k = 1$;
si $x_o < \omega$ et si $x_1 > A$, on aura

$$k \leqslant E\left(\log_2 \frac{x_1}{A}\right) + 2 .$$

IX Cet indice k trouvé, on remarque alors que, si $x_k \neq \omega$, on a $x_{k+1} \leqslant x_k - 1 \leqslant A - 1$, d'où l'existence d'un p tel que :

$$x_p = \omega < x_{p-1} \leqslant A - (p - k - 1)$$

c'est-à-dire $p < A + k + 1 - \omega$ ou enfin

$$k \leqslant p \leqslant A - \omega + k .$$

Si $x_k = \omega$, alors $p = k$.

A partir de cette valeur :

$$\begin{cases} x_p = x_{p+2} = \dots = \omega \\ x_{p+1} = x_{p+3} = \dots \in \{\omega, \omega+1\} . \end{cases}$$

X Une majoration plus brutale du premier indice p tel que $x_p = \omega$ est donnée par :

$$\boxed{p \leqslant x_1 - \omega + 1} \qquad (\leqslant x_1)$$

En effet $x_1 \geqslant \omega$. Si $x_1 = \omega$, $p = 0$ ou $p = 1$. Sinon, $x_2 \leqslant x_1 - 1$ et ainsi de suite, d'où :

$$x_p = \omega < x_{p-1} \leqslant x_1 - (p - 2)$$

c'est-à-dire $p < x_1 + 2 - \omega$ ou enfin $p \leqslant x_1 - \omega + 1$.

XI Par exemple si, comme il est usuel, $x_o = 1$, alors

$$p \leqslant x_1 = E\left(\frac{1}{2}(1+A)\right) \leqslant \frac{A+1}{2}$$