2

DANS NOS CLASSES

Recherche à partir d'un jeu télévisé
dans une classe rurale à trois cours
(C.E. 2, C.M. 1, C.M. 2)

par P. LEGOUPIL, Valcanville (Manche)

I *A partir du jeu "Le compte est bon"*

Les élèves de ma classe, ayant vu à la télévision le jeu "le compte est bon", m'ont demandé s'il ne serait pas possible d'y jouer en classe. Certains, les plus jeunes, trouvaient ce jeu trop compliqué. Après discussion et tâtonnement, nous avons mis au point le jeu suivant : dans un petit sac de toile, nous avons placé 10 jetons numérotés de 0 à 9. Un élève tire 5 des jetons (exemple 1, 5, 7, 8, 9). Les jetons tirés sont ensuite remis dans le sac. Puis l'élève tire successivement 2 jetons a,b. On écrit le nombre $10a+b$. Exemple : le tirage 7,8 donne le nombre 78. Le jeu consiste à former ce nombre 78, en utilisant les cinq nombres d'un chiffre une fois et une seulement et les quatre opérations. Pour les tirages 1,5,7,8,9 et 78 une solution est $\big((8+9)5\big) - (7\times 1) = 78$.

Autre exemple : 45 avec 1,4,5,7,9 ; $\big((7-1)9\big) - (4+5) = 45$.

Le premier élève qui trouve une solution marque 5 points ; s'il s'est trompé, on lui retire 5 points. Le temps est limité à 30 secondes. Passé de laps de temps, l'élève qui approche le plus près du résultat marque 3 points et les élèves qui ont le résultat exact mais avec 4,3 ou 2 nombres d'un chiffre marquent 4, 3 ou 2 points (ceci pour encourager les élèves de CE_2 moins rapides que ceux de CM_2).

Rapidement, ce jeu a passionné toute la classe et peu à peu le règlement s'est complété et a été modifié : on a d'abord totalisé les points chaque semaine, puis on a divisé la classe en deux groupes, les forts et les faibles, pour ne pas désavantager les faibles. Malgré cela, les meilleurs élèves de chaque groupe raflaient tous les points. Afin de ne pas décourager ceux qui n'en avaient jamais, la règle des 30 secondes a été généralisée. Ainsi, au bout de trente secondes, tous ceux qui avaient trouvé une solution marquaient leurs points.

Par la suite, sans utiliser le sac, certains élèves proposèrent des problèmes à leurs camarades. Certains ont tenu la classe en échec pendant plusieurs jours comme ceux-ci :

80 avec 1,3,4,6,9 $\quad (\frac{6}{3}\times 4)(9+1)$ ou $(6-1)(9+4+3)$

81 avec 1,4,7,8,9 $\quad 9(\frac{8}{4}+7)1$

Nous avons également installé un secrétaire de séance qui notait sur un tableau tous les chiffres et nombres sortis. Au bout de quelques semaines, les élèves ont pu constater que l'espérance de sortie de tel ou tel chiffre était à peu près la même. Ils se sont aperçus également que notre univers était limité. Non seulement nous n'avions que 90 nombres de deux chiffres possibles, mais les combinaisons de 5 nombres d'un chiffre étaient très limitées. Par tâtonnement on a tenté de trouver le nombre de tirages possibles mais l'essai n'a pas abouti. Les élèves ont découvert qu'avec un sac de 5 jetons, il n'y avait qu'une possibilité, avec 6 jetons, 6 possibilités et avec 7, 21 possibilités... et ils ne sont pas allés plus loin. Il aurait été trop difficile de leur expliquer la formule

$$C(10,5)=\frac{10\,!}{5\,!\;(10-5)\,!}=252 \qquad (1)$$

II *Variantes*

Nous avons essayé d'élargir notre champ d'action. Tout d'abord le zéro pouvait valoir indifféremment 0 ou 10. On avait ainsi deux problèmes différents pour le même nombre. Exemples :

70 avec 2,6,8,9,0 $\quad (9\times 8)-2+(6\times 0)$

70 avec 2,6,8,9,10 $\quad (9\times 10)-\left((2\times 6)+8\right)$

(1) 3 ! désigne $1\times 2\times 3$. 5 ! désigne $1\times 2\times 3\times 4\times 5$; ainsi 10 ! désigne $1\times 2\times 3\times \ldots\times 9\times 10$.
C(10,5) désigne le nombre de parties à 5 éléments d'un ensemble à 10 éléments.

Les enfants ont remarqué qu'avec notre petit sac de 10 jetons nous ne pouvions pas sortir deux fois le même chiffre à moins de remettre le jeton tiré dans le sac après chaque tirage ; après discussion, ils ont proposé de mettre dans le sac 5 chiffres de chaque sorte. Nous avons donc confectionné 40 jetons supplémentaires et nous sommes repartis avec, cette fois, un univers considérablement élargi : 100 nombres de 2 chiffres et 2002 tirages possibles (voir paragraphe IV).

Notre secrétaire a pu nous faire constater que si l'espérance de sortie de chaque chiffre n'était pas modifiée, c'étaient les combinaisons du type a,a,b,c,d a,b,c,d,e a,a,b,b,c a,a,a,b,c qui dans l'ordre apparaissaient le plus fréquemment. Il n'y eut qu'une combinaison du type a,a,a,b,b et aucune des types a,a,a,a,b ou a,a,a,a,a.

Nous avons tenté une exploration vers les décimaux : les chiffres tirés ayant, soit leur valeur propre, soit le $\frac{1}{10}$ de leur valeur.

Exemple : 2,3,5,9,1 pour former 5,6
2 pouvant être utilisé avec valeur de 0,2 ; 3 valeur de 0,3 etc ...
On a la solution : $9+1-5+(0,2\times 3)$.

Nous avons assez rapidement abandonné cette voie, la plupart des élèves préférant les naturels.

Par contre, une exploration en direction des rationnels a été amorcée et a eu quelque succès chez les bons élèves. Cette fois, le nombre devait être de la forme $\frac{a}{b}$.
Exemples : avec le tirage 2,8,4,1,7 et $\frac{3}{5}$ on a :

$$\frac{\frac{8}{4}+1}{7-2}=\frac{3}{5}$$

De même avec 1,4,6,9,2 et $\frac{5}{7}$, on peut écrire

$$\frac{5}{7}=\frac{9+1}{(4\times 2)+6}$$

Les règles de simplification offrent dans ce cas de nombreuses possibilités.

III *Un problème*

Cependant, nous sommes revenus aux naturels afin de faire participer l'ensemble de la classe à la recherche. En fin d'année, je proposais un nouveau jeu : tirer cinq nombres d'un chiffre et trouver, en une demi-heure, le plus possible de nombres de deux chiffres. Les nombres 9,3,3,1,4 furent tirés et chacun se mit au travail. Chaque élève trouva de 6 à 37 solutions. Le secrétaire les nota toutes. On obtint 57 nombres de deux chiffres.

Quelqu'un proposa alors : "Et si on essayait de les trouver tous ?" On écrivit au tableau tous les nombres manquant et dès que l'un deux était trouvé, le secrétaire le notait et on l'effaçait. Il ne resta plus bientôt que 47, 62, 63, 70, 71, 74, 87. Allait-on en rester là ?

Le lendemain 62 tombait : $\big((9\times 3)+4\big)(3-1)$; puis 63 : $(9+3)(4+1)+3$.

En fin de semaine, il ne restait que 47 et 87. Pour 47, une solution fut apportée par un élève : "c'est mon père qui l'a trouvée" ; ainsi l'expérience débordait même le cadre scolaire. Il ne restait plus que 87. Fallait-il l'abandonner ? Soudain, quelqu'un s'écria pendant la leçon de lecture : "Je l'ai ! J'ai 87". L'inventeur fut félicité par tous : $[(9-1)4-3]3$.

Si des collègues sont intéressés par cette expérience et se lancent dans cette même voie, je serais heureux de connaître leurs résultats.

J'ajoute que les élèves se sont demandé si on pouvait trouver tous les nombres de 0 à 99 à partir de 5 autres nombres d'un chiffre. Je n'ai pu que constater avec eux que le produit des 5 nombres devait au moins atteindre 99. Pour le reste le problème reste ouvert et nous demandons de l'aide.

IV *La part du maître*

Un sac contient 5 séries de 10 jetons numérotés de 0 à 9. On tire 5 jetons et on appelle tirage la liste des 5 numéros ainsi tirés en ne tenant pas compte de l'ordre de sortie.

Par exemple : (1,5,7,8,9), (9,3,3,1,4), (9,3,3,3,4) sont des tirages distincts.

Dans ces conditions, quel est le nombre de tirages ?

J'ai, d'abord, pensé à la formule $C(50,5) = \dfrac{50!}{5!\,(50-5)!}$ soit

2 118 760 tirages. Résultat inacceptable puisque, si on tenait compte de l'ordre de sortie des numéros, on formerait des nombres de 5 chiffres et qu'il y en a au plus 100.000.

IV — 1 *Nombre de tirages*

Les tirages ne peuvent prendre que l'une des 7 formes suivantes :

1ère forme : (a,a,a,a,a) ; 10 cas possibles : (0,0,0,0,0), (1,1,1,1,1), etc ...

2ème forme : (a,a,a,a,b) ; 10×9 cas possibles : (0,0,0,0,1), (0,0,0,0,2), etc ...

3ème forme : (a,a,a,b,b) ; 10×9 cas possibles : (0,0,0,1,1), (0,0,0,2,2), etc ...

4ème forme : (a,a,a,b,c) ; $\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2}$ cas possibles, car b et c peuvent permuter ; soit 360 cas

5ème forme : (a,a,b,b,c) ; $\frac{10 \times 9 \times 8}{1 \times 2}$ cas possibles, car a et b peuvent permuter ; soit 360 cas

6ème forme : (a,a,b,c,d) ; $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3}$ cas possibles, car b,c,d peuvent permuter ; soit 840 cas

7ème forme : (a,b,c,d,e) ; $\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ cas possibles, compte tenu des permutations des 5 nombres ; soit 252 cas.

On a donc $(10 + 2 \times 90 + 2 \times 360 + 840 + 252)$ c'est-à-dire 2002 tirages possibles.

IV — 2 *Tirages et nombres de 5 chiffres*

Chaque type de tirages engendre une famille de nombres de 5 chiffres. Comment retrouver les 100.000 nombres prévus ?

1°) un tirage de la forme (a,a,a,a,a) n'engendre qu'un seul nombre.

2°) un tirage de la forme (a,a,a,a,b) engendre 5 nombres puisqu'il s'agit de choisir la place de b.

3°) un tirage de la forme (a,a,a,b,b) engendre 10 nombres car il s'agit de choisir la place des a. Il y a C(5,3), c'est-à-dire $\frac{5!}{3!\ 2!}$ tels choix ; soit 10 nombres.

4°) un tirage de la forme (a,a,a,b,c) engendre $C(5,3) \times C(2,1)$ nombres car il faut choisir les places des a et la place des b.

Et $C(5,3) \times C(2,1) = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{2!}{1!\,1!}$, d'où 20 nombres.

5°) un tirage de la forme (a,a,b,b,c) engendre $C(5,2) \times C(3,2)$ nombres car il faut choisir les places des a et les places des b.

Comme $C(5,2) \times C(3,2) = \frac{5!}{3!\,2!} \times \frac{3!}{2!\,1!}$, on a 30 nombres.

6°) un tirage de la forme (a,a,b,c,d) engendre $C(5,2) \times C(3,1) \times C(2,1)$ nombres, soit 60 nombres.

7°) un tirage de la forme (a,b c,d,e) engendre 5! c'est-à-dire 120 nombres.

Le tableau ci-dessous résume les calculs précédents :

Forme du tirage	Nombre de tirages	Permutations	Nombre de nombres de 5 chiffres
(a,a,a,a,a)	10	1	10
(a,a,a,a,b)	90	5	450
(a,a,a,b,b)	90	10	900
(a,a,a,b,c)	360	20	7200
(a,a,b,b,c)	360	30	10800
(a,a,b,c,d)	840	60	50400
(a,b,c,d,e)	252	120	30240
Total	2002		100000

Le total correspond bien aux 100 000 premiers nombres.
Et il y a bien 2 002 cas possibles pour notre jeu.

IV — 3 *Et le nombre 2 118 760 ?*

Supposons que chaque jeton de même valeur ait une couleur différente.

Nous aurons bien alors $\frac{50!}{5!\,(50-5)!} = 2\,118\,760$ cas.

Comment répartir nos 2 002 cas ne tenant pas compte des couleurs dans cet ensemble de 2 118 760 ? et quelles sont les probabilités de sortie ?

1°) Pour la forme (a,a,a,a,a), nous avons vu qu'il n'y a que 10 cas sans permutation possible, la probabilité est donc de $\frac{1}{211\,876}$ soit approximativement 5×10^{-6}.

2°) Pour la forme (a,a,a,a,b), avec les jetons de couleur les 90 cas se trouvent multipliés par

$C(5,4) \times C(5,1) \left(\frac{5!}{4!\ 1!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} = 25\right)$, soit $90 \times 25 = 2250$.

La probabilité est donc de $\frac{2\,250}{2\,118\,760}$, approximativement 1/1000.

3°) Pour la forme (a,a,a,b,b) les 90 cas se trouvent multipliés par $C(5,3) \times C(5,2) \left(\frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{5!}{2!\ 3!} = 100\right)$, soit $90 \times 100 = 9\,000$.

La probabilité est de $\frac{9\,000}{2\,118\,760}$, soit à peu près $\frac{1}{235}$.

4°) Forme (a,a,a,b,c) : les 360 cas sont multipliés par

$$C(5,3) \times C(5,1) \times C(5,1) \quad \left(\frac{5!}{3!\ 2!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} \times \frac{5!}{1!\ 4!} = 250\right);$$

soit $360 \times 250 = 90\,000$.

Probabilité $\frac{90\,000}{2\,118\,760}$, approximativement $\frac{1}{23}$.

5°) Forme (a,a,b,b,c) : les 360 cas sont multipliés par $C(5,2) \times C(5,2) \times C(5,1)$, soit $360 \times 500 = 180\,000$

Probabilité : $\frac{180\,000}{2\,118\,760}$, comprise entre $\frac{1}{11}$ et $\frac{1}{12}$.

6°) Forme (a,a,b,c,d) :

$$C(5,2) \times C(5,1) \times C(5,1) \times C(5,1) = 10 \times 5 \times 5 \times 5 = 1\,250$$

soit $840 \times 1250 = 1\,050\,000$

Probabilité : $\frac{1\,050\,000}{2\,118\,760}$, sensiblement $\frac{1}{2}$.

7°) Forme (a,b,c,d,e) : $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3250$
soit $252 \times 3250 = 787\,500$

Probabilité : très près de $\frac{1}{3}$.

Le total des 7 formes donne :
$10 + 2\,250 + 9\,000 + 90\,000 + 180\,000 + 1\,050\,000 + 787\,500$
c'est-à-dire $2\,118\,760$.

Ce total correspond bien au résultat de la formule C(50,5) et les calculs qui précèdent corroborent les constatations de notre secrétaire (voir II, page 2).

V *En guise de conclusion*

Lorsque les enfants m'ont proposé de jouer à "Le compte est bon", je croyais, en acquiesçant, leur offrir des occasions de calculer. Je me suis assez vite rendu compte qu'ils me posaient, du même coup, de nombreux problèmes de dénombrement.

N'ayant pas, au départ, de connaissance en analyse combinatoire, j'ai calculé comme je le pouvais et, pour vérifier mes résultats, je me suis procuré le livre de Ivan Niven : "Premières notions de probabilité et analyse combinatoire" (Dunod) dont je conseille vivement la lecture aux collègues intéressés.

J'ai trouvé, dans ce livre, confirmation de mes recherches mais aussi la formule des combinaisons avec répétitions qui m'aurait donné directement 2002 $\left(C(10+5-1,5) \quad \text{soit} \quad \frac{14!}{5!\ 9!}\right)$ mais ne m'aurait pas permis de trouver le rapport existant entre 2002, 100 000 et 2 118 760.