Initiation au produit vectoriel en terminale

par P. ROUGEE (ROUEN)

Il s'agit d'introduire, à l'usage du physicien, l'outil produit vectoriel (classique) avant que les questions d'orientation de l'espace aient été traitées en mathématique.

L'enseignant physicien, qui travaille de façon intrinsèque, a besoin dès le début d'un produit vectoriel qui soit un *vecteur :* pas de doute pour lui que la force $q\vec{V} \wedge \vec{B}$ soit un vecteur.

Je donne ci-dessous la charpente du discours que peuvent tenir l'un après l'autre le mathématicien et le physicien. J'ajoute que l'idéal serait que ces deux rôles soient tenus par le même individu, ***affichant clairement ses changements de casquette.***

I — Le mathématicien

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension trois.
Etant donné deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de E et une base $\mathfrak{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le vecteur

$$\vec{C} \overset{\text{déf}}{=} \vec{x}\,(A_y B_z - A_z B_y) + \vec{y}\,(\qquad\qquad) + \vec{z}\,(\qquad\qquad)$$

dépend à priori des éléments qui ont servi à le définir, à savoir $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et la base $\mathfrak{B}$.

a — *Dépendance par rapport à $\vec{A}$ et $\vec{B}$:* bilinéarité, antisymétrie, annulation si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles (linéairement dépendants), s'établissent aisément.

b — *Dépendance par rapport à la base.*

L'indépendance par rapport à cette base est manifeste si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles puisque $\vec{C}$ est nul dans ce cas. Voyons maintenant ce qu'il en est quand $\vec{A}$ et $\vec{B}$ ne sont plus parallèles.

— Un calcul un peu long mais facile montrera que :

$$\vec{C}^2 = \vec{A}^2\vec{B}^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2 \qquad (= \vec{A}^2\vec{B}^2 \sin^2(\vec{A},\vec{B}))$$

d'où on déduit que *la norme de $\vec{C}$ est indépendante de la base utilisée.*

— Un calcul beaucoup plus facile montrera que $\vec{A}.\vec{C}$ et $\vec{B}.\vec{C}$ sont nuls, donc que $\vec{C}$ est orthogonal au plan vectoriel engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, ce qui entraîne en particulier que *la direction de $\vec{C}$* (droite vectorielle engendrée par C) *est indépendante de la base utilisée.*

Or il n'existe que deux vecteurs orthogonaux à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et ayant pour norme $[\vec{A}^2\vec{B}^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2]^{1/2}$. Ces deux vecteurs sont opposés et $\vec{C}$ est l'un d'eux.

En fait, *ce sera tantôt l'un tantôt l'autre selon la base utilisée :* par exemple, le vecteur $\vec{C}'$ défini comme $\vec{C}$ en utilisant les mêmes vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ mais la base $\mathcal{B}' = (\vec{x},\vec{y},-\vec{z})$ est l'opposé de $\vec{C}$.

Nous pouvons donc dire que *seul le sens du vecteur $\vec{C}$ dépend de la base utilisée*, mais *nous ne sommes pas en mesure de préciser selon quelle loi* car *nous n'avons pour l'instant aucun moyen de faire une différence entre les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$*. Il nous faut pour cela introduire ce que nous appellerons *orientation* de l'espace E.

2 — Le physicien

Nous utilisons en physique l'espace E pour schématiser l'espace physique. Or dans cet espace physique nous avons le moyen, en utilisant les notions de droite et de gauche, de déceler une différence entre les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, ou plus précisément entre les "bases" de l'espace physique qu'elles schématisent : deux observateurs traversés des pieds vers la tête par le troisième vecteur ($\vec{z}$ pour $\mathcal{B}$ et $-\vec{z}$ pour $\mathcal{B}'$) et regardant entre les deux premiers vecteurs ont le premier vecteur ($\vec{x}$ dans les deux cas) l'un à droite, l'autre à gauche.

Et on constate la même différence entre les bases $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ et $(\vec{A},\vec{B},\vec{C}')$.

Définition. Dans l'espace physique une "base" est dite positive si un observateur placé ... , et négative dans le cas contraire.

Définition. On appelle produit vectoriel de $\vec{A}$ par $\vec{B}$, et on note $\vec{A} \wedge \vec{B}$, celui des deux vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{C}'$ (donc : *orthogonal à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et de norme ...) tel que la "base" de l'espace physique schématisée par la base $(\vec{A},\vec{B},\vec{A} \wedge \vec{B})$ soit positive.*

On démontrera en mathématique le : *Théorème : Si $\mathcal{B}$ est positive, $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$*

Ce théorème pourra être vérifié dans le cas particulier où $\vec{A}$ est choisi égal à $\vec{x}$ et $\vec{B}$ égal à $\vec{y}$.

3 - Le mathématicien

Après avoir donné sa définition des bases positives et négatives dans un espace abstrait et sa définition du produit vectoriel en imposant tout simplement à la base $(\vec{A},\vec{B},\vec{A} \wedge \vec{B})$ d'être positive, il ajoutera : quand on utilise notre E pour schématiser l'espace physique, nos bases positives schématisent les "bases" de l'espace physique qui sont positives au sens donné en physique.*Notre définition du produit vectoriel est donc bien la même que celle que l'on a donnée en physique.*

Il établira ensuite le théorème énoncé en physique.

— COMMENTAIRES

La méthode proposée est convenable sur le plan de la dialectique concret-modèles, à la fois pour ce qui est de la modélisation du monde physique et pour ce qui est de l'élaboration des structures mentales des élèves. Comme il est convenable, la pratique physique de l'orientation a précédé l'élaboration des structures abstraites qui en rendent compte.

Par ailleurs, *le physicien retrouve la définition élémentaire avec laquelle il est familier.* Cette définition est *intrinsèque* (elle ne fait appel à aucun choix de base préalable) et *s'intègre parfaitement dans la pratique mathématique moderne des élèves.* Et le *théorème annoncé donne accès à tous les résultats utiles pour le calcul.*

A mon avis, l'exposé ci-dessus doit être fait entièrement par l'enseignant mathématicien. Parce que c'est son travail : même, voire surtout, les considérations sur l'utilisation de l'outil dans la schématisation de l'espace physique. Mais il est bien évident que son collègue physicien peut parfaitement, au prix d'un peu de vernis moderne et d'une certaine hygiène de langage, et doit pour le plus grand intérêt de ses élèves, dominer ce qui précède. En devenant moderne la mathématique ne lui est pas pour autant devenue étrangère.

[L'espace physique n'est pas orienté en soi, et le schématiser par un espace orienté introduit dans le modèle un ingrédient dont on est fatalement obligé un jour de se demander quelle a été l'influence. D'où les vecteurs dits axiaux qui "changent de sens", ce qui est une absurdité mathématique mais cohérente (donc utile) puisqu'il s'agit d'une interprétation imagée d'un mécanisme (impliquant le modèle mathématique et son ancrage sur le concret) qui lui n'est pas absurde. Il est très possible, et souhaitable, de se contenter d'un espace euclidien non orienté pour schématiser l'espace physique. Mais, en dehors de la question de savoir si les élèves de terminale peuvent accéder aux outils nécessaires (algèbre extérieure, endomorphismes antisymétriques ...), dont l'importance est évidente, il faut remarquer deux choses. La première est que *l'immense majorité du corps enseignant n'est absolument pas préparée à cette reconversion pour le moins difficile*. La seconde est que si l'orientation de l'espace n'a pas de base matérielle, et si donc le scientifique averti doit s'efforcer de s'en affranchir, c'est aussi devenu un *fait social* que l'on ne peut ignorer ni en tant que citoyen (code de la route) ni en tant que technicien inférieur, moyen ou supérieur. C'est pourquoi je crois que le produit vectoriel classique a encore sa place en terminale.]