Note sur les relations entre les programmes de mathématique et de physique dans l'enseignement du second cycle (*)

Cette note repose sur une étude faite par Mme DUBOIS-VIOLETTE, Inspecteur Général de Mathématiques. Elle a été adoptée après discussion par le groupe chargé d'étudier l'harmonisation entre les programmes de mathématiques et de physique.

Les buts que l'on se propose ici sont les suivants :

— Apporter aux physiciens, tant membres de la commission de réforme qu'enseignants, des informations utiles sur le contenu des programmes de mathématiques.

— Souligner certains problèmes que pose l'harmonisation des programmes des deux disciplines.

— Faire quelques suggestions aux enseignants des deux disciplines sur la manière de coordonner le déroulement des programmes et d'harmoniser le vocabulaire.

— Attirer l'attention de la commission Lagarrigue sur certaines limitations imposées par les programmes de mathématiques.

I — Indications sur les programmes actuels de mathématiques en quatrième et troisième

A) *Algèbre*

L'essentiel du contenu du programme porte sur les sujets suivants :

① calculs sur les nombres décimaux ; écritures différentes d'un même décimal ($0{,}00079 = 7{,}9 \times 10^{-4} = 0{,}79 \times 10^{-3} \ldots$) ; encadrement d'un nombre réel par deux décimaux de la forme $a \times 10^{-n}$, $(a + 1) \times 10^{-n}$; calculs dans $\mathbf{R}$.

② fonctions du 1er degré : fonction linéaire $x \mapsto ax$ et fonction affine $x \mapsto ax + b$, applications.

---

(1) Ce texte émane d'un groupe de travail de la Commission Lagarrigue comprenant des physiciens et des mathématiciens : il a été approuvé en séance plénière (N.D.L.R.).

B) *Présentation de la géométrie plane*

La présentation actuelle diffère profondément de l'ancienne : à partir d'une expérimentation assez soignée, les élèves prennent conscience des propriétés d'incidence des droites d'un plan, de l'existence de bijections (c'est-à-dire correspondances bi-univoques) entre une droite et l'ensemble R des réels, de l'existence dans le plan physique de bijections particulières ou graduations régulières, enfin de la propriété de Thalès.

De cette expérimentation résultent :

① une définition mathématique de la droite et l'étude de différents problèmes : calcul de l'abscisse d'un point dans une graduation g connaissant son abscisse dans une graduation f, milieu d'un couple de points, plus généralement recherche dans le cas de coefficients numériques simples, en général entiers, du barycentre de deux points.

② un système d'axiomes définissant un plan (non métrique) ; en quatrième : axiomes de définition d'une droite, axiome d'Euclide, axiome de Thalès.

On étudie alors le parallélogramme (défini comme un quadrilatère dont les diagonales ont même milieu), la relation d'équipollence, la notion de vecteurs, l'addition de deux vecteurs et les translations, la multiplication d'un vecteur par un réel, le repérage d'un point dans un plan (à cette occasion, on peut étudier, en exercice seulement, la propriété des médianes d'un triangle), l'équation cartésienne d'une droite.

On reprend une expérimentation, dans la classe de troisième. Celle-ci conduit à reconnaître la possibilité dans le plan physique de comparer les distances de deux couples de points non alignés et l'existence d'une relation d'orthogonalité entre directions de droites telle que le rapport de projection orthogonal d'un axe (euclidien) sur un autre soit symétrique. Ceci conduit à la définition du plan affine euclidien.

On montre alors que deux couples de points équipollents ont même distance, ce qui permet de définir la norme d'un vecteur. On établit le théorème de Pythagore et ses différentes conséquences, notamment l'expression dans un repère orthonormé de la distance de deux points. C'est seulement alors que l'on définit les isométries dont on donne seulement les exemples de la translation, de la symétrie par rapport à un point, et de la symétrie par rapport à une droite. On pose enfin le problème de la mesure des angles et l'on définit les lignes trigonométriques.

Dans toute cette construction, il n'est question que de façon élémentaire des triangles égaux (isométriques) et jamais des triangles semblables.

II – Classe de Seconde

L'étude systématique des espaces vectoriels de dimension 2 est faite en classe de seconde, celle des espaces de dimension 3 en classe de première.

Il semble que la mise en place du nouveau programme de physique ne soulève, en ce qui concerne les connaissances mathématiques des élèves, aucun problème fondamental mais seulement des points de détail portant principalement sur le vocabulaire utilisé dans les deux disciplines et sur la façon d'utiliser les notions mathématiques familières aux élèves.

A) *Géométrie et mécanique*

① Dès le debut de l'année, l'utilisation du calcul vectoriel permet d'étudier rapidement la composition de forces appliquées en un même point A, (force appliquée en A ayant pour vecteur la somme des vecteurs des différentes forces) ; la connaissance du barycentre de deux points doit permettre de simplifier l'étude d'un système de deux forces parallèles, de somme non nulle, et la détermination du centre d'inertie de deux solides S_1, S_2 dont on connaît les centres d'inertie G_1, G_2 .

② Il sera bon de faire prendre conscience aux élèves un peu plus tard des faits suivants :

– l'espace vectoriel des vecteurs déplacements (dans un plan) est l'espace vectoriel associé au plan physique (affine, euclidien) usuel.

– les espaces vectoriels des vitesses, des quantités de mouvements, des accélérations ... sont des espaces vectoriels distincts, mais la notion de direction dans l'un ou l'autre a toujours la même signification physique et il est légitime de les représenter sur une même figure : seule l'unité de longueur choisie reste arbitraire pour chacun de ces espaces vectoriels.

Il peut y avoir intérêt, au point de vue pédagogique, à utiliser des couleurs différentes sur une même figure pour représenter des éléments appartenant à des espaces vectoriels différents. Les élèves éviteront ainsi d'ajouter des vecteurs éléments d'espaces différents et une force leur apparaîtra plus clairement comme la donnée d'un point de l'espace affine physique et d'un vecteur, élément d'un espace vectoriel qui n'est pas celui des déplacements.

B) ***Fonctions du premier degré et grandeurs à accroissements proportionnels***

Le calcul des proportions n'est plus au programme du premier cycle et la règle de trois n'a pas été utilisée systématiquement même dans les classes primaires, toutefois :

① L'étude des fonctions $x \mapsto ax$ et $x \mapsto ax + b$ permet de définir des variables proportionnelles ou à accroissements proportionnels. Il y aura lieu d'insister auprès des professeurs de mathématiques pour que cet aspect de leur enseignement ne soit pas sacrifié à l'utilisation de fonctions de ces types pour des problèmes de géométrie analytique d'intersection de droites.

Le physicien insistera, quant à lui, sur la vérification graphique de la proportionnalité de grandeurs physiques par l'alignement des points représentatifs de couples associés.

② Rappelons le mécanisme de la règle de trois :

Soit deux variables proportionnelles, y et x deux valeurs numériques correspondantes, on a $y = ax$, a étant une constante indépendante du couple particulier (y,x) considéré. On a donc pour une valeur x_0 : $y_0 = a\,x_0$ d'où $a = \frac{y_0}{x_0}$ et $y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x$ qui s'écrit aussi $y = \frac{y_0 \cdot x}{x_0}$.

Il suffit de faire traduire la relation de proportionnalité pour obtenir le procédé de calcul. Ceci n'a, d'ailleurs, d'intérêt que dans le cas d'une utilisation répétée du procédé.

Les élèves n'ont peut-être pas entendu parler de grandeurs inversement proportionnelles : il suffit de leur dire que la valeur numérique de l'une est proportionnelle à l'inverse de la valeur numérique de l'autre.

Signalons deux points de vocabulaire :

① Le mot *variation* pour le professeur de physique a le sens du mot *accroissement* pour le mathématicien qui envisage volontiers des accroissements négatifs : le professeur de mathématiques devra, par suite, éviter de parler des *variations d'une fonction* pour désigner le *sens de variation de cette fonction*.

② Le coefficient angulaire d'une droite d'équation $y = ax + b$ dans un repère donné (orthonormé ou non) est le nombre réel a. La pente d'une droite est son coefficient angulaire dans le cas où le repère considéré est orthonormé ; la pente est alors la *tangente* de l'angle de la droite avec l'axe des x et non le *sinus* comme c'est parfois le cas en dehors des mathématiques (Exemple : dans le langage courant, la pente d'une route est le sinus de l'angle qu'elle fait avec l'horizontale).

C) *Trigonométrie*

L'usage de la trigonométrie n'apparaît pas essentiel dans les nouveaux projets de programmes pour la physique en seconde. Signalons néanmoins quelques points importants :

① C'est seulement à la fin de la troisième que sont définis cosinus, sinus et tangente pour un angle compris entre 0 et π radians. Ces notions seront reprises et précisées au début de la seconde. Toutefois, la notion de rapport de projection orthogonale est familière aux élèves entrant en seconde et s'identifie au cosinus.

Il faudra donc que le professeur de physique utilise de préférence le cosinus, le sinus étant défini comme le cosinus de l'angle complémentaire.

A ce sujet, il serait utile que la notion de cosinus soit introduite assez tôt dans l'année de troisième dans l'enseignement des mathématiques, pour éviter que les élèves ne l'aient pas suffisamment assimilée.

② L'usage des tables de carrés, pour la recherche des racines carrées, a préparé les élèves à l'emploi systématique de tables numériques : tables trigonométriques et, plus tard, tables logarithmiques.

III — Classe de première

La nature des difficultés rencontrées en classe de première est différente de celles de la classe précédente : le professeur de physique utilise des notions mathématiques que les élèves n'acquièrent qu'au cours de l'année. Il semble extrêmement difficile d'harmoniser les développements des deux cours de manière à résoudre *toutes* les difficultés.

Les deux points essentiels semblent les suivants :

① *Utilisation de la notion de dérivée*

La notion de dérivabilité et de nombre dérivé est introduite en mathématiques en première. On peut demander au professeur de mathématiques de traiter en début d'année les questions de limite et de continuité, ce qui amène les élèves à savoir ce qu'est la dérivée d'une fonction numérique en décembre. Il serait souhaitable que le professeur de physique puisse attendre ce moment avant d'aborder le problème de la vitesse instantanée en mécanique. De toute façon, la dérivée d'une fonction vectorielle n'est définie qu'en terminale, et le professeur de physique sera amené à étudier seulement les dérivées des composantes d'un vecteur dans un repère fixe.

Il y a d'autre part une mise au point importante à faire sur l'emploi avec des sens différents de la notation différentielle en mathématiques et en physique.

(2) *Etude des mouvements vibratoires*

Les formules de trigonométrie et l'étude des fonctions trigonométriques sont abordées seulement au troisième trimestre de la classe de première et ne peuvent l'être beaucoup plus tôt car le problème de la mesure des angles doit être traité antérieurement. Ce que le professeur de mathématiques pourrait faire auparavant serait l'étude des fonctions cos, sin, tg pour un angle variant de 0 à π radians.

Dans une première partie de l'étude physique, la propriété de périodicité des phénomènes semble plus importante que leur représentation par des fonctions trigonométriques. Ainsi, le professeur de mathématiques peut dès le début de l'année, voire en seconde, montrer que la somme de deux fonctions numériques ayant "une" période commune T, le carré d'une fonction de période T, le produit de deux fonctions de période T sont des fonctions de période T et illustrer ces propriétés par des exemples de fonctions en escalier ou affines par morceaux (c'est-à-dire représentées graphiquement par une suite de segments de droite).

Peut-être peut-on envisager de repousser en terminale une partie de l'étude des mouvements vibratoires et de la remplacer en première par des questions mettant en jeu éventuellement du calcul linéaire (circuits électriques ?).

IV — Classe de terminale

La commission de physique a attiré notre attention sur la nécessité où se trouvera le professeur de physique d'utiliser le produit vectoriel dès le début de la classe de terminale. La nature des applications envisagées : force de Laplace, règle d'Ampère pour le champ magnétique créé par un courant, ne permet pas d'esquiver la notion de produit vectoriel. Tout au contraire, ces applications constitueront nécessairement la base d'un assez grand nombre d'exercices et de calculs et il sera donc nécessaire que les élèves puissent les traiter avec aisance. Enfin, dans la mesure où le programme définitif comportera une partie importante de physique moderne, celle-ci ne pourra être développée qu'après l'électromagnétisme, ce qui exige de traiter celui-ci assez tôt dans l'année.

Or, il se trouve que, du point de vue des mathématiciens, le produit vectoriel ne peut venir qu'après un sérieux approfondissement du calcul vectoriel, dans la mesure où il exige de définir l'orientation de l'espace. Pour la même raison, le caractère intrinsèque du produit vectoriel (c'est-à-dire le fait qu'il se transforme comme un vecteur dans un changement de base), ne peut être abordé au début de la Terminale en mathématiques, car il exige d'avoir étudié au préalable les isométries.

Conscient de ces difficultés, le groupe de travail a abouti à une proposition qu'il soumet à l'examen des deux parties :

L'exercice d'approche suivant est traité dès le début de l'année en mathématiques. Une base $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ orthonormée étant choisie, à tout couple $(\vec{A},\vec{B})$ de vecteurs est associé le vecteur $\vec{C}$ défini par ses composantes :

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y \quad , \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z \quad , \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x \quad .$$

On voit que $\vec{C}$ est nul si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles ; sinon, en calculant $\vec{C}.\vec{A}$ et $\vec{C}.\vec{B}$ on établit que le support de $\vec{C}$ est la droite vectorielle orthogonale au plan vectoriel engendré par $\vec{A}$ et $\vec{B}$, et ne dépend pas de la base. Le calcul de la norme de $\vec{C}$ ($\|\vec{C}\|^2 = \|\vec{A}\|^2\|\vec{B}\|^2 - (\vec{A}.\vec{B})^2$) montre que celle-ci ne dépend pas non plus de la base. Seul le sens dépend de la base (il y a deux applications possibles).

C'est alors la tâche du professeur de physique, lorsqu'il introduit le produit vectoriel, de montrer comment orienter l'espace pour faire un choix entre les deux vecteurs possibles, en signalant, sans démonstration, que ce choix est bien cohérent.

Plus tard, le professeur de mathématiques pourra revenir rapidement sur la notion d'orientation et en montrer le caractère intrinsèque.

Signalons que ce procédé devra être suivi, aussi bien en terminale D (option mathématique faible) qu'en terminale C (option mathématique forte).[1]

---

(1) Voir également ci-après (page 167) un article de ROUGEE (N.D.L.R.).

Les nombres complexes peuvent être introduits tôt dans l'année munis de leur écriture trigonométrique et de son interprétation géométrique.

V — Résumé des conclusions et suggestions

Suggestions pour l'enseignement des mathématiques

1) En troisième, faire l'étude du cosinus avant la fin de l'année. Enseigner l'usage des tables trigonométriques.
2) En troisième, expliquer l'usage pratique de l'application linéaire et de l'application affine.
3) En seconde, reprendre l'étude de la trigonométrie au début de l'année.
4) En seconde, étudier les fonctions périodiques ainsi que les fonctions paires et impaires et la translatée d'une fonction.
5) En première, étudier au début les notions de limite, de continuité et de dérivée d'une fonction numérique.
6) En terminale, étudier au tout début l'algèbre du produit vectoriel et, plus tard, l'orientation de l'espace et le caractère intrinsèque du produit vectoriel.

Suggestions pour l'enseignement de la physique

A) *Elaboration des programmes*

1) Maintenir l'étude des mouvements périodiques en première à un niveau élémentaire n'utilisant que les propriétés les plus élémentaires des fonctions périodiques.
2) En terminale : pour l'utilisation du produit vectoriel : voir plus haut.

B) *Pratique de l'enseignement*

1) En seconde, n'utiliser au début que le cosinus (le sinus étant le cosinus de l'angle complémentaire).
2) En seconde, utiliser les tables trigonométriques (ainsi $\cos 30^\circ = 0{,}866$ ...) sans privilégier artificiellement dans les exercices les angles remarquables qui sont peu connus des élèves.
3) En seconde, ne pas utiliser de triangles semblables dans la résolution d'un problème. Utiliser, dans la mesure du possible, le calcul vectoriel et éventuellement la géométrie analytique (voir à ce sujet l'article de M. Roumieu, page 143).
4) On peut utiliser la notion de barycentre en seconde.

5) Utiliser les fonctions linéaires à la place de la *règle de trois*. Ne pas utiliser cette dernière locution. Vérifier graphiquement les proportionnalités.

6) Utiliser les craies de couleur pour distinguer les représentations d'espaces vectoriels différents (déplacements, vitesses) sur une même figure.

7) Il y a un certain nombre de points de vocabulaire à retenir. Voir à ce sujet le texte précédent de cette note ainsi que l'article cité de M. Roumieu, en particulier pour le calcul vectoriel.