Bulletin de l'APMEP n°292 - Février 1974

4

INTERDISCIPLINARITÉ

A propos de l'utilisation des nouveaux programmes de mathématiques dans l'enseignement de la physique

par ROUMIEU,

pour l'équipe Mathématique - Physique de l'I.R.E.M. de Montpellier (1)

La première génération d'élèves ayant reçu dans tout le premier cycle un enseignement modernisé de mathématique vient d'entrer en seconde. Rappelons, en effet, que c'est en octobre 1969 que les nouveaux programmes de mathématique sont entrés en vigueur simultanément en sixième et en seconde, puis, en 1970 en cinquième et en première, en 1971 en quatrième et en terminale, et enfin, en 1972 en troisième.

La situation se trouve ainsi notablement modifiée car les élèves de seconde n'ont pas tout à fait les mêmes connaissances mathématiques, en géométrie notamment, que leurs aînés. Ils connaissent les *vecteurs*, mais ignorent les *triangles semblables*.

Notre propos est d'apporter aux professeurs de physique quelques informations sur ce que savent — ou devraient savoir (2) — les élèves qui sont en seconde cette année. Nous avons choisi deux questions particulièrement importantes, les *vecteurs* et les

---

(1) Ce texte a été adopté par la sous-commission chargée au sein de la Commission Lagarrigue d'étudier l'harmonisation des enseignements de Mathématique et Physique.

(2) N'ayons pas d'illusions. La distance est *parfois* grande entre ce que les élèves savent et ce qu'ils devraient savoir. Mais est-ce là un fait nouveau !

angles, et nous avons essayé de montrer sur quelques exemples comment on pouvait utiliser les connaissances mathématiques actuelles des élèves.

VECTEURS

On étudie maintenant en quatrième la géométrie affine du plan. Dans cette partie de la géométrie, on ne compare jamais deux segments de directions différentes et on ne s'intéresse pas aux angles. Lorsque, pour étudier l'état d'un gaz, on trace un graphique en portant en abscisse le volume et en ordonnée la pression, les seules propriétés de ce graphique qui aient une signification physique appartiennent à la géométrie affine. Les notions les plus essentielles en géométrie affine sont le parallélisme et l'énoncé de Thalès (*) qui fournit de nombreuses relations de proportionnalité.

La notion de vecteur est maintenant abordée vers la fin de la classe de quatrième ; c'est l'aboutissement de l'étude de la géométrie affine. Nous nous proposons de montrer, très succinctement, comment cette notion est maintenant, en général, présentée aux élèves. Pour cela, il faut préciser le sens de quelques termes.

On appelle *bipoint* un couple de points. Un bipoint est noté (A, B), A et B désignant des points. A est *l'origine*, B *l'extrémité* du bipoint (A, B). Si les points A, B sont distincts, les bipoints (A, B) et (B, A) sont différents.

On appelle *repère* d'une droite D un bipoint (O, I), les points O, I, étant distincts et appartenant à D. On appelle *repère* d'un plan Π un triplet (O, I, J), les points O, I, J étant non alignés et appartenant à Π. Lorsqu'on aura défini les vecteurs, un repère d'une droite D pourra être déterminé par une origine O et un vecteur non nul $\vec{i}$ ($\vec{i} = \overrightarrow{OI}$), appelé *vecteur de base.* Un repère d'un plan Π pourra être déterminé par une origine O et deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}, \vec{j}$ ($\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$), appelés vecteurs de base.

Pour aboutir à la notion de vecteur, on suit souvent, en quatrième, la progression suivante :

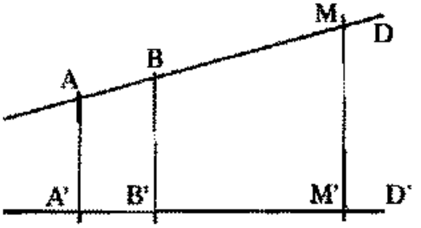
1 — Droite — Abscisse d'un point par rapport à un repère. Relation de Chasles — Abscisse d'un point partageant un bipoint

(*) Nous dirons "énoncé" parce que, suivant l'axiomatique suivie, cette propriété apparaît comme un axiome ou comme un théorème. Naturellement, pour le professeur de physique, cela n'a aucune importance.

dans un rapport donné ; en particulier, abscisse du milieu (demi-somme).

2 — Plan — Projection sur une droite D, parallèlement à une direction autre que celle de D. Repérage d'un point par ses coordonnées par rapport à un repère.

3 — Enoncé de Thalès — Soit A, B, M, trois points d'une droite D ($A \neq B$) ; A', B', M' respectivement, leurs projections sur une droite D' parallèlement à une direction distincte de celle de D et de celle de D'. Alors, on a



$$\frac{\overline{A'M'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$$

Coordonnées du point partageant un bipoint dans un rapport donné. En particulier, coordonnées du milieu.

4 — Equipollence — On dira que deux bipoints (A, B) , (C, D) sont *équipollents* lorsque les segments [AD] , [BC] ont le même milieu.

Faire un dessin, envisager en particulier le cas où trois points sont alignés. On exprimera provisoirement que les bipoints (A, B), (C, D) sont équipollents par l'écriture

$$(A, B) \quad \textbf{eq} \quad (C, D)$$

Théorème 1

Les propositions

$(A, B) \quad \textbf{eq} \quad (C, D)$ $\qquad\qquad$ $(A, C) \quad \textbf{eq} \quad (B, D)$

sont équivalentes.

Faire un dessin pour voir et comprendre le sens de ce résultat. La démonstration est une conséquence immédiate et purement formelle de la définition de l'équipollence.

Théorème 2

Soit (O, I, J) un repère. Pour que les bipoints (A, B), (C, D) soient équipollents, il faut et il suffit que l'on ait

$$(1) \quad x_B - x_A = x_D - x_C \quad \text{et} \quad y_B - y_A = y_D - y_C$$

Démonstration — D'après la définition, (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si

$$\frac{1}{2}(x_A + x_D) = \frac{1}{2}(x_B + x_C) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(y_A + y_D) = \frac{1}{2}(y_B + y_C)$$

ce qui manifestement est équivalent à (1).

Exercice : L'équipollence des bipoints est une relation d'équivalence.

La réflexivité et la symétrie sont des conséquences immédiates de la définition. Il n'en est pas de même de la transitivité. C'est pourquoi il est commode d'établir d'abord le théorème 2.

5 — Vecteurs. Un vecteur est la classe d'équivalence formée par les bipoints équipollents à un-bipoint donné.
A tout bipoint (A, B) est associée sa classe d'équivalence, c'est-à-dire un vecteur noté $\overrightarrow{AB}$.
Dire que deux bipoints (A, B), (C, D) sont équipollents, c'est dire qu'ils appartiennent à la même classe, ou qu'ils définissent le *même* vecteur ; c'est dire que l'on a

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Remarques importantes

a) La notion de bipoint est utilisée pour introduire la notion de vecteur et n'est pratiquement plus utilisée par la suite. En particulier, les deux énoncés

$$(A, B) \quad \text{eq} \quad (C, D) \qquad ; \qquad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

sont équivalents. Les vecteurs étant définis, la deuxième écriture est la seule utilisée.

b) Le nom "vecteur" désigne maintenant ce qui fut longtemps appelé "vecteur libre". Tous les vecteurs modernes étant libres, la locution "vecteur libre" est désormais inutile.

La locution "vecteurs équipollents" est incorrecte : ce sont les bipoints qui sont équipollents. Les vecteurs sont égaux.

Par exemple, dans le mouvement de translation d'un solide, tous les points du solide ont, à un instant donné, des vecteurs-vitesses égaux.

c) Du point de vue de la rigueur formelle, on peut désigner un vecteur par une lettre, surmontée ou non d'une flèche, pourvu que ce symbole ne soit pas utilisé pour désigner autre chose. En général, on utilise une lettre surmontée d'une flèche, ce qui rappelle la nature de l'objet mathématique désigné et évite bien des confusions et des erreurs. D'autre part, il est parfois commode de désigner par la même lettre, surmontée ou non d'une flèche, un vecteur et son intensité, par exemple

$\vec{P}$; P pour le poids d'un corps

6 — Translations — A tout vecteur $\vec{u}$ est associée une transformation ponctuelle, appelée *translation*, et notée $T_{\vec{u}}$, définie de la façon suivante :

L'image M d'un point quelconque m par la translation $T_{\vec{u}}$ est définie par

$$\overrightarrow{mM} = \vec{u}$$

La correspondance

$$\vec{u} \longmapsto T_{\vec{u}}$$

qui fait correspondre à tout vecteur $\vec{u}$ la translation associée est une bijection de l'ensemble des vecteurs sur l'ensemble des translations.

Remarques importantes

a) Le nom "*translation*" évoque, dans le langage usuel, une idée de mouvement. Il est essentiel de bien distinguer la translation, transformation géométrique, des mouvements de translation. Pour cela, il semble très souhaitable :

i) que les élèves connaissent — ne serait-ce que de façon très empirique — un ou deux exemples de mouvement de translation non rectiligne ;

ii) que les professeurs s'efforcent d'éviter le nom "translation" tout court lorsqu'il s'agit d'un mouvement de translation, ou tout au moins attirent l'attention des élèves sur le sens précis du nom "translation" dans la question étudiée.

b) La translation est sans doute l'image la plus simple qu'on puisse se faire d'un vecteur. C'est pourquoi il paraît souhaitable d'associer aussitôt que possible vecteurs et translations.

7 — Opérations vectorielles — Nous n'étudierons pas la définition de l'addition vectorielle et de la multiplication d'un vecteur par un nombre. Bornons-nous à quelques remarques.

a) Soit $T_{\vec{u}}$, $T_{\vec{v}}$ les translations associées aux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$. A tout point m, on associe son image m_1 par la translation $T_{\vec{v}}$, puis l'image M de m_1 par la translation $T_{\vec{u}}$.

$$m \xmapsto{T_{\vec{v}}} m_1 \xmapsto{T_{\vec{u}}} M$$

La transformation ponctuelle qui associe à tout point m le point M est une translation — il faut le vérifier — notée $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$.

La translation composée $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}}$ n'est autre que la translation associée au vecteur $\vec{u} + \vec{v}$, c'est-à-dire

$$T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}+\vec{v}}$$

b) On utilise le même symbole "+" pour l'addition des vecteurs et pour l'addition des nombres. L'expérience montre que cette confusion ne présente aucun risque, ce qui s'explique par le fait que l'addition vectorielle et l'addition des nombres obéissent aux mêmes règles algébriques.

c) Il est sans doute préférable, avec des débutants, de distinguer le vecteur nul $\vec{O}$ et le nombre 0. D'ailleurs, on peut estimer qu'il y aurait quelque incohérence à distinguer soigneusement le vecteur-poids $\vec{P}$ de son intensité P, et à confondre sans scrupule $\vec{O}$ et 0. Cependant, il faut dire que la confusion entre $\vec{P}$ et P est dangereuse et n'est tolérée par aucun mathématicien ou physicien, alors que la confusion entre $\vec{O}$ et 0 est sans risque et d'usage courant dans la littérature scientifique (*).

d) Soit O un point. A chaque vecteur $\vec{u}$, on associe le point M défini par

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$$

Le point O étant fixé, la correspondance

$$\vec{u} \longmapsto M$$

est une bijection de l'ensemble des vecteurs sur le plan Π.

8 — Vecteurs-liés (*) — Dans de nombreuses et importantes questions de physique (forces appliquées à un solide, vitesse, quantité de mouvement, accélération d'un point matériel), on est conduit à associer un point et un vecteur. Le concept mathématique correspondant est celui de *vecteur-lié*.

(*) Un exemple parmi des centaines : Dieudonné — Algèbre linéaire et géométrie élémentaire, chez Hermann.

(*) La contradiction avec la remarque b) du § 5 est flagrante. Elle se situe au niveau du langage. Un vecteur-lié n'est pas un vecteur. Un cochon d'Inde est-il un cochon ?

Définition. Soit Π le plan (ou, éventuellement, l'espace) et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel. On appellera vecteur-lié tout couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de Π et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}$.

Remarques

a) Dans la plupart des cas, $\mathcal{V}$ n'est pas l'espace des vecteurs géométriques associés à Π. Par exemple, dans le cas des forces appliquées à un solide, $\mathcal{V}$ est l'espace des vecteurs-forces. Dans un changement d'unité, les vecteurs de $\mathcal{V}$ ne se transforment pas de la même manière que les vecteurs géométriques associés à Π. C'est pour cela que la notion de vecteur-lié ne se réduit pas à celle de bipoint.

b) On pourrait définir de façon naturelle la somme de vecteurs-liés ayant tous la même origine, mais la somme de deux vecteurs-liés d'origines différentes n'est jamais définie.

Forces appliquées à un solide

Lorsqu'on étudie l'action d'un système de forces sur un *solide*, on est naturellement conduit à considérer comme équivalents deux systèmes de forces qui produisent la même action sur le solide donné.

Les expériences montrent que

i) On ne change pas l'action d'une force sur un solide lorsqu'on la "fait glisser le long de son support".

ii) On ne change pas l'action exercée sur un solide lorsqu'on remplace un système de forces de même origine O par un autre système de forces ayant la même origine O et la même somme.
Ce qui précède conduit à la théorie mathématique des systèmes de vecteurs-liés, qu'il n'est pas question de développer ici. On se limitera à la définition suivante :

Définition

On dira que deux systèmes de vecteurs-liés sont équivalents lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre par une succession des opérations suivantes :

i) Remplacer un vecteur-lié $(O, \vec{u})$ par un vecteur-lié $(O', \vec{u})$ à condition que $\overrightarrow{OO'}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.

ii) Remplacer des vecteurs-liés de même origine O

$$(O, \vec{u_1}), \quad (O, \vec{u_2}), \ldots\ldots\ldots (O, \vec{u_n})$$

par d'autres ayant la même origine O

$$(O, \vec{v_1}), \quad (O, \vec{v_2}), \ldots\ldots\ldots (O, \vec{v_p})$$

tels que $\vec{v_1} + \vec{v_2} + \ldots\ldots + \vec{v_p} = \vec{u_1} + \vec{u_2} + \ldots\ldots + \vec{u_n}$

Vérifiez que la relation "être équivalent à" que nous venons de définir sur l'ensemble des systèmes de vecteurs-liés est bien une relation d'équivalence.

Remarque. On utilise de moins en moins le concept de "vecteur glissant" qui correspond à une idée importante en mécanique — l'action d'une force sur un solide ne change pas lorsqu'on la "fait glisser le long de son support" — parce que sa structure mathématique est trop complexe.

LES ANGLES

Le nom "angle" recouvre un certain nombre de concepts connus et utilisés depuis la plus haute antiquité — en particulier par les astronomes — . Cependant, ces concepts n'ont été démêlés et clarifiés par les mathématiciens qu'à une époque très récente. Dans ce domaine particulièrement, on devra utiliser les concepts bien avant de pouvoir étudier leurs définitions rigoureuses — j'entends au niveau de rigueur exigé maintenant en mathématique.

La notion la plus élémentaire paraît être celle de *secteur angulaire.* Suivant le contexte, la locution "secteur angulaire" désigne :

i) une paire de demi-droites Δ , Δ' de même origine ;

ii) l'intersection de deux demi-plans limités par des droites sécantes.

La première définition a le mérite de convenir aux secteurs angulaires nuls (Δ , Δ' confondues) et aux secteurs angulaires plats (Δ , Δ' en prolongement). La deuxième a l'avantage de mettre en évidence une propriété importante, la convexité.

Il n'y a pas lieu de s'affoler parce qu'un nom peut désigner deux objets mathématiques différents. Cette situation est fréquente, particulièrement en géométrie. Savez-vous si un triangle est un ensemble de trois points, une ligne brisée fermée ou un sous-ensemble convexe du plan ? L'important est de savoir de quoi on parle lorsque c'est nécessaire, et d'éviter les malentendus. Lorsqu'on affirme que les médianes d'un triangle sont concourantes, peu importe de quel triangle il s'agit. Lorsqu'on parle de la surface d'un triangle, tout le monde comprend qu'il s'agit du triangle-ensemble convexe. Par contre, pour parler du centre de gravité, il vaut mieux, assez souvent, préciser de quel triangle il s'agit.

Les secteurs angulaires "rentrants" ont heureusement à peu près disparu. Les secteurs angulaires modernes peuvent être *aigus*, *obtus*, *droits*, *nuls*, *plats*.

Les angles que nous allons maintenant définir sont ceux que connaissent les élèves à la fin de la classe de troisième, et qui sont appelés "angles géométriques" par le programme officiel.

On part de la notion de secteur angulaire. Notons $\{\Delta, \Delta'\}$, le secteur angulaire défini par deux demi-droites Δ, Δ' de même origine. On considère la relation :

Il existe un déplacement plan qui transforme $\{d, d'\}$ en $\{\Delta, \Delta'\}$, ce qui signifie que ce déplacement transforme d en Δ et d' en Δ' ou transforme d en Δ' et d' en Δ.

On vérifie que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des secteurs angulaires.

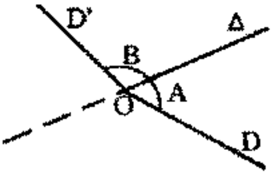
Un angle géométrique est la classe d'équivalence formée de tous les secteurs angulaires qu'on peut obtenir par déplacement à partir d'un secteur angulaire donné.

A chaque secteur angulaire $\{d, d'\}$ est donc associé un angle géométrique, qui sera noté $\widehat{d, d'}$. Lorsque le secteur angulaire est défini par son sommet O et deux points A, B, cet angle sera noté $\widehat{AOB}$.

Les angles géométriques sont ceux de la géométrie élémentaire. Comme les secteurs angulaires, ils peuvent être *obtus*, *aigus*, *droits*, *nuls*, *plats*.

Lorsqu'on parle des angles d'un triangle, c'est presque toujours des angles géométriques qu'il s'agit.

On définit dans certains cas une addition des angles géométriques. Etant donné deux angles A, B, on peut, à partir d'une demi-droite Δ d'origine O, construire deux demi-droites D, D', situées de part et d'autre de la droite support de Δ, telles que $\widehat{D, \Delta} = A$; $\widehat{D', \Delta} = B$.



Lorsque Δ est incluse dans le secteur angulaire — ensemble convexe — $\{D, D'\}$, la somme A + B existe et c'est l'angle géométrique $\widehat{D, D'}$. Dans le cas contraire, la somme A + B n'existe pas.

Nous ne détaillerons pas les propriétés de cette addition des angles géométriques (commutativité, associativité, élément neutre, pas de symétrique) qui font qu'elle mérite à peu près son nom.

La somme des angles d'un triangle existe toujours et elle est égale à un angle plat. Par contre, la somme des angles d'un polygone convexe de plus de trois côtés n'existe pas dans ce contexte.

Etant donné un angle A, on peut toujours le diviser par 2 (construction de la bissectrice).

En troisième, on admet la possibilité de mesurer les angles géométriques. Cela signifie qu'il existe une bijection de l'ensemble des angles géométriques sur l'ensemble des nombres réels compris entre 0 et 180 (mesure en degrés) de telle sorte que :

i) 0 correspond à l'angle nul et 180 à l'angle plat ;

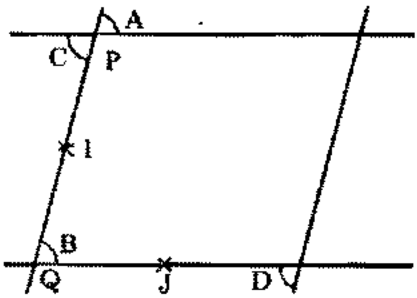
ii) lorsque la somme A + B existe, sa mesure est la somme des mesures de A et de B.

Les rapports trigonométriques d'un angle géométrique sont définis sans difficulté. Les rapports trigonométriques des angles remarquables (30^o, 45^o, 90^o ...) sont déterminés au moyen des relations métriques dans le triangle rectangle.

Les formules d'addition ne sont pas connues des élèves sortant de la classe de troisième et ne sont étudiées qu'en classe de première.

Essayons maintenant de répondre à quelques questions que peuvent se poser les professeurs de physique.

1 — Les propriétés des angles — ou plutôt secteurs angulaires — autrefois dénommés "correspondants", "alternes-internes" sont avantageusement remplacées par l'emploi de translations et de symétries.



C'est ainsi que les égalités des angles marqués A, B, C, D, résultent des propriétés suivantes :

On passe de A à B par la translation $\overrightarrow{PQ}$.

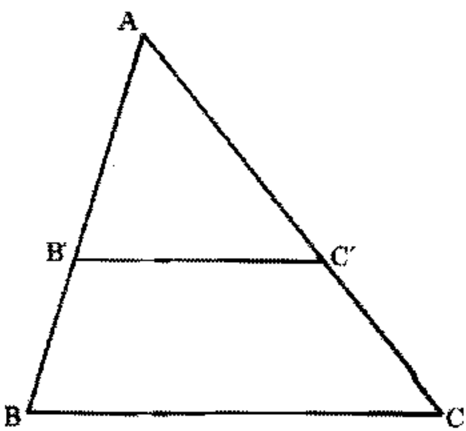
On passe de C à B par la symétrie par rapport au point I.

On passe de B à D par la symétrie par rapport au point J.

2 — La propriété des angles aigus à côtés perpendiculaires n'est pas toujours connue des élèves. Elle peut, dans pratiquement tous les cas, être remplacée par la remarque que les deux angles en question ont le même complément.

3 — La propriété de l'angle inscrit et de l'angle au centre est ignorée des élèves. D'ailleurs, le double de l'angle inscrit n'existe pas toujours.

4 — Triangles semblables — Dans la plupart des problèmes de physique que l'on rencontre dans le second cycle, les triangles semblables que l'on rencontre sont homothétiques. Le théorème de Thalès et le calcul vectoriel élémentaire permettent d'obtenir dans ce cas les relations de proportionnalité dont on a besoin à condition qu'aient été mises en évidence, au moins dans des exercices, les propriétés suivantes :



Dans la figure ci-contre, où les droites BC et B'C' sont parallèles, l'énoncé de Thalès fournit la relation

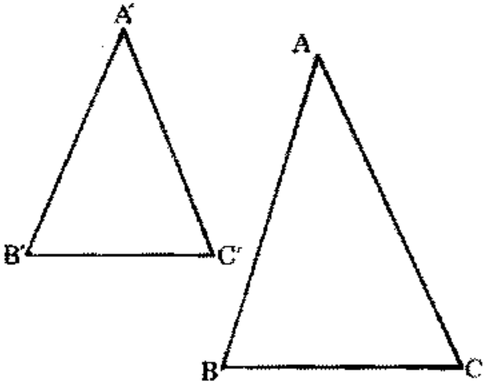
$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$$

Désignons par λ la valeur commune de ces rapports. On peut alors écrire, d'après la définition même du produit d'un vecteur par un scalaire

$\overrightarrow{AB'} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC'} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$

d'où on déduit par soustraction

$$\overrightarrow{B'C'} = \lambda\, \overrightarrow{BC}$$



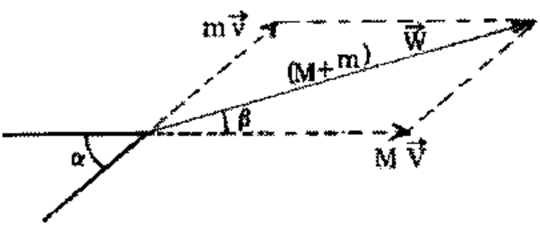
Lorsque les côtés d'un triangle A'B'C' sont parallèles aux côtés d'un triangle ABC, la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ramène au cas précédent et l'on peut écrire en toute généralité

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\, \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{A'C'} = \lambda\, \overrightarrow{AC}\ ;$$
$$\overrightarrow{B'C'} = \lambda\, \overrightarrow{BC}$$

EXEMPLES

Composition de quantités de mouvement

Deux points matériels animés chacun d'un mouvement rectiligne uniforme se rencontrent et, dans le choc, se soudent de manière à ne former après le choc qu'un seul point matériel. On admettra que ce point matériel unique est animé, après le choc, d'un mouvement rectiligne uniforme.



Le premier point matériel a une masse M et une vitesse $\vec{V}$. Le second a une masse m et une vitesse $\vec{v}$. L'angle de leurs trajectoires est α.

Déterminer le vecteur vitesse $\vec{W}$ du point matériel unique après le choc. Calculer le module de ce vecteur vitesse. Calculer l'angle β des vecteurs $\vec{V}, \vec{W}$. Calculer la différence entre l'énergie cinétique du système avant le choc et après le choc.

La conservation des quantités de mouvement fournit la relation

$$(M + m)\,\vec{W} = M\,\vec{V} + m\,\vec{v}$$

Remarquons d'abord qu'on peut déterminer graphiquement le module du vecteur $(M + m)\vec{W}$ et l'angle β. Il ne faut pas mépriser cette solution graphique. La précision du dessin est au moins aussi bonne que la précision des mesures qu'il est possible de réaliser dans une expérience de ce genre.

Pour calculer W, on peut écrire

$$(M + m)\, W^2 = (M\,\vec{V} + m\,\vec{v})^2$$
$$= M^2 V^2 + m^2 v^2 + 2\,M\,m\,V\,v\cos\alpha$$

Pour calculer l'angle β, on utilise les projections sur un axe de vecteur directeur $\vec{V}$. On a ainsi

$$(M + m)\,W\cos\beta = M\,V + m\,v\cos\alpha$$

d'où

$$\cos\beta = \frac{M\,V + m\,v\cos\alpha}{\sqrt{M^2 V^2 + m^2 v^2 + 2\,M\,m\,V\,v\cos\alpha}}$$

Désignons par E_1 l'énergie cinétique avant le choc et E_2 l'énergie cinétique après le choc. On a

$$2\,E_1 = M\,V^2 + m\,v^2 \qquad 2\,E_2 = (M + m)\,W^2$$

$$2\,(M+m)\,(E_2 - E_1) = M^2V^2 + m^2v^2 + 2\,M\,m\,v\cos\alpha - (M+m)\,(M\,V^2 + m\,v^2)$$
$$= -M\,m\,(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\cos\alpha)$$
$$E_2 - E_1 = -\frac{M\,m}{2\,(M+m)}\,(V^2 + v^2 - 2\,V\,v\cos\alpha)$$

On a $E_2 - E_1 \leqslant 0$ et on ne peut avoir $E_2 - E_1 = 0$ que dans le cas $V = v$; $\alpha = 0$; c'est-à-dire $\vec{V} = \vec{v}$.

Remarque

Nous avons utilisé un produit scalaire pour le calcul de W. Le produit scalaire n'est étudié qu'en seconde. On peut l'éviter en utilisant les projections sur l'axe de vecteur directeur $\vec{V}$ et un axe perpendiculaire. On a ainsi

$$(M + m)\,W\cos\beta = M\,V + m\,v\cos\alpha$$
$$(M + m)\,W\sin\beta = m\,v\sin\alpha$$

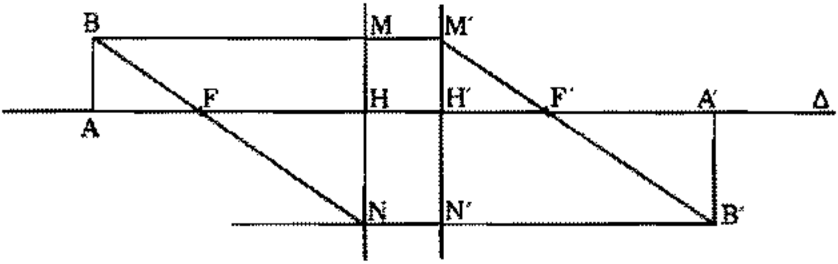
d'où on déduit aisément $(M + m)^2\,W^2$.

Formule d'optique géométrique

On considère un système centré. L'axe Δ est orienté dans le sens de la propagation de la lumière. On désigne par H, H' les points principaux et par F, F' les foyers. On pose

$$f = \overline{HF} \qquad ; \qquad f' = \overline{H'F'}$$

La figure rappelle la construction de l'image A' B' d'un objet AB



Posons

$$\lambda = \frac{\overline{FA}}{\overline{FH}} \qquad \mu = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'H'}}$$

On a alors

$$\overrightarrow{FA} = \lambda\, \overrightarrow{FH} \qquad \overrightarrow{FB} = \lambda\, \overrightarrow{FN}$$

et par soustraction

$$\overrightarrow{AB} = \lambda\, \overrightarrow{HN} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{AB} = \lambda\, \overrightarrow{A'B'} \qquad (1)$$

On a de même

$$\overrightarrow{F'A'} = \mu\, \overrightarrow{F'H'} \qquad \overrightarrow{F'B'} = \mu\, \overrightarrow{F'M'}$$

et, par soustraction

$$\overrightarrow{A'B'} = \mu\, \overrightarrow{H'M'} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \overrightarrow{A'B'} = \mu\, \overrightarrow{AB} \qquad (2)$$

La comparaison des égalités (1) et (2) donne $\lambda\mu = 1$, et, par conséquent

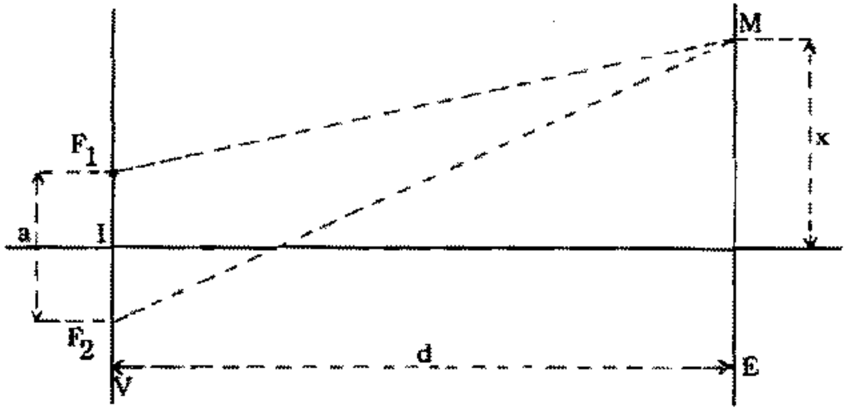
$$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = ff'$$

Interférences

Le système étudié comporte deux fentes F_1, F_2 situées dans un même plan vertical V, horizontales, et un écran E dont le plan est parallèle à V.

M est un point de l'écran et il s'agit de calculer la différence des distances de M aux fentes F_1, F_2.

La figure est faite dans le plan passant par M perpendiculaire aux fentes.



On note

a la distance des deux fentes

d la distance de l'écran aux fentes

x la distance de M à la médiatrice de $[F_1 \ F_2]$

a et x sont très petits par rapport à d (de l'ordre de $\frac{d}{1000}$).

On suppose pour le calcul que M est plus près de F_1 que de F_2.

Pour évaluer la différence $MF_2 - MF_1$, on calcule

$$\overline{MF_2}^2 - \overline{MF_1}^2 = (\overrightarrow{MF_2} + \overrightarrow{MF_1})\ (\overrightarrow{MF_2} - \overrightarrow{MF_1})$$
$$= 2\,\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{F_1\,F_2}$$
$$= 2\,a\,x$$

On a donc $(M\,F_2 - m\,F_1)\ (M\,F_1 + M\,F_2) = 2\,ax$

On commet une erreur négligeable en remplaçant $M\,F_1 + M\,F_2$ par 2 d. On obtient ainsi

$$M\,F_2 - M\,F_1 = \frac{a\,x}{d}$$

Remarque

Le calcul de la différence des carrés de deux côtés d'un triangle est souvent utile. Cependant, si le calcul de $\overline{MF_2}^2 - \overline{MF_1}^2$ semble artificiel, ou si les élèves ne sont pas familiarisés avec le produit scalaire, on peut aussi traiter la question analytiquement :

$$\overline{MF_1}^2 = d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \qquad \overline{MF_2}^2 = d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$MF_2 - MF_1 = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2ax}{\sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} + \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{2xa}{MF_2 + MF_1}$$

Une majoration de l'erreur commise en remplaçant MF_1 et MF_2 par d peut être obtenue simplement. Supposons

$$x + \frac{a}{2} \leqslant \epsilon \qquad ; \qquad \left| x - \frac{a}{2} \right| \leqslant \epsilon$$

On a alors

$$d \leqslant MF_1 \leqslant \sqrt{d^2 + \epsilon^2} \qquad d \leqslant MF_2 \leqslant \sqrt{d^2 + \epsilon^2}$$

et

$$\sqrt{d^2 + \epsilon^2} - d = \frac{\epsilon^2}{d + \sqrt{d^2 + \epsilon^2}} \leqslant \frac{\epsilon^2}{2d}$$

Le fait que lorsqu'un triangle rectangle a un côté petit, la différence entre l'hypothénuse et le grand côté de l'angle droit est du même ordre de grandeur que le carré du petit côté est très important.