Bulletin de l'APMEP n°292 - Février 1974

L'utilisation des familles en algèbre linéaire

par Joëlle PICHAUD (I.R.E.M., Université Paris VII)

Bien que n'étant pas intégralement d'accord avec l'article de Monsieur ARNOULD "*Affaires de familles*" paru dans le n° 290, j'apprécie la tentative qui est faite pour faire pénétrer dans l'enseignement secondaire une notion qui est pourtant fort simple, mais qui est surtout mal connue et par conséquent considérée comme difficile.

Redonnons la définition :

> *Etant donné deux ensembles E et I, on appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.*

Si f est une telle application et i un élément de I, il est d'usage (mais ce n'est évidemment pas obligatoire) de représenter l'élément f(i) de E par une lettre latine ou grecque avec l'indice "i" en bas ou en haut, par exemple x_i, M^i, α_i, ϕ^i, la famille étant alors notée $(x_i)_{i \in I}$, $(M^i)_{i \in I}$, $(\alpha_i)_{i \in I}$, $(\phi^i)_{i \in I}$.

Pratiquement on utilise la notion de famille à tous les niveaux des mathématiques, l'ensemble I d'indexation étant assez souvent un ensemble fini (on dit dans ce cas que la famille est finie). Par exemple, lorsque l'on dit "considérons deux droites", ce que l'on précise quelquefois en disant "considérons deux droites distinctes ou confondues" ou au contraire "considérons deux droites distinctes", ce n'est pas un ensemble de deux droites que l'on considère, mais une famille de droites indexée par un ensemble à deux éléments, l'application dans le dernier cas étant supposée injective. De même, lorsque l'on dit "soient trois points" on parle en fait d'une famille de points indexée par un ensemble à trois éléments, famille qui peut évidemment être assujettie à certaines conditions.

Dans ces situations l'ensemble I utilisé est souvent un intervalle de N du type [0, n] ou [1, n], une famille indexée par un ensemble à n éléments étant appelée un n-uplet.

L'usage des n-uplets indexés par [1, n] peut remplacer assez longtemps celui des familles, mais présente au moins deux inconvénients :

a) l'ensemble d'indexation est naturellement ordonné et il est important de savoir quand cet ordre est ou n'est pas utilisé (*) ;

b) dans certains calculs, si n est supérieur à 4 ou 5, on peut avoir des écritures assez longues dont on ne comprend pas immédiatement la signification.

Notations usuelles :

Etant donné un corps K, on note K^I l'ensemble des applications de I dans K, i.e. l'ensemble des familles d'éléments de K indexées par I.

K^I a une structure naturelle de K-espace vectoriel. Si une application f de I dans K est telle que $f(i) = 0$ pour tous les éléments i de I sauf un nombre fini d'entre eux, on dit que la famille f est à support fini.

L'ensemble des familles d'éléments de K, indexées par I et à support fini est un sous-espace vectoriel de K^I, noté $K^{(I)}$.

Remarque : Lorsque $I = [1, n]$ on a $K^{(I)} = K^I$, ensemble que l'on note K^n.

Nous allons donner maintenant quelques définitions et propriétés relatives aux familles d'éléments d'un K-espace vectoriel E.

Soit f une application de I dans E et $(x_i)_{i\in I}$ la famille déterminée par f. On associe canoniquement à cette famille une application linéaire g de $K^{(I)}$ dans E, de la manière suivante :

si $(\alpha^i)_{i\in I}$ est un élément de $K^{(I)}$, les éléments $\alpha^i x_i$ de E sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux qui ont une somme dans E que l'on convient de noter $\sum_{i\in I} \alpha^i x_i$. On pose alors $g((\alpha^i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} \alpha^i x_i$, application dont on vérifie facilement qu'elle est linéaire.

On a alors les définitions suivantes :

Définition 1. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si g est injective.

(*) Etant donné un ensemble E et un ensemble totalement ordonné I, on appelle famille ordonnée d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E.
Par exemple, à la famille $(x_i)_{i\in [1,n]}$ on peut associer n ! familles ordonnées, chacune correspondant à l'un des n ! ordres totaux sur $[1, n]$.

Définition 2. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si g est surjective.*

Définition 3. *La famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base si et seulement si g est bijective.*

Je ne crois pas indispensable de parler de sous-famille ou de sur-famille d'une famille f (dans le premier cas on considère la restriction de f à une partie de I, et dans le second cas on considère une application dans E prolongeant f), mais cela peut donner lieu à des exercices qui ont évidemment l'avantage d'habituer les élèves à la manipulation des familles.

Une propriété importante des familles libres d'un espace vectoriel E conduit à la notion de dimension d'un espace vectoriel :

Si $(f(i))_{i \in I}$ est une famille libre de E, l'application f est injective.

On convient d'appeler cardinal de la famille libre $(f(i))_{i \in I}$ le cardinal de l'ensemble I (qui est aussi, ici, celui de f(I)). On démontre, en utilisant l'axiome de ZORN, que toutes les bases d'un espace vectoriel E ont même cardinal, lequel est appelé dimension de E. Ce résultat peut d'ailleurs être démontré de manière élémentaire lorsque E admet une famille génératrice finie, comme corollaire du théorème suivant :

Si E a une famille génératrice indexée par un ensemble à n éléments, toute famille libre est de cardinal inférieur ou égal à n.

Je n'ai pas encore parlé des parties d'un espace vectoriel, mais il faut bien y arriver puisque ce sont elles qui sont encore trop souvent utilisées. Ne parlons pas des "systèmes de points" qui, comme l'a signalé M. ARNOULD, n'ont jamais été définis, ce qui ne les a pas empâchés de faire une belle carrière.

Ce que l'on constate c'est que l'utilisation des parties conduit, si l'on ne prend pas de précautions suffisantes, à des énoncés faux. L'exemple d'erreur donné par M. ARNOULD vient de ce que l'image d'une famille liée n'est pas nécessairement une partie liée. Par exemple, si x est un élément non nul de E, la famille (x_1, x_2), où $x_1 = x_2 = x$, est liée, alors que la partie $\{x_1, x_2\} = \{x\}$ est libre.

On peut remarquer aussi que cette utilisation manque de cohérence : lorsque l'on considère l'image d'une partie P de E par une application linéaire h (situation très fréquente), ce que l'on utilise pratiquement ce n'est pas h(P) mais la famille déterminée par la restriction de h à P i.e. h(P) indexé par P. Au contraire si l'on considère une famille $(f(i))_{i \in I}$ d'éléments de E son image par h n'est rien d'autre que la famille h o f.

Pour remédier à ces inconvénients, il convient d'associer une famille à toute partie d'un ensemble :

Définition : Etant donné une partie P de E, on appelle famille canoniquement associée à P la famille déterminée par l'application identique de P dans E.

Autrement dit, chaque élément de P est indexé par lui-même.
On a alors les définitions :

La partie P de l'espace vectoriel E est libre (resp. génératrice, une base) si et seulement si la famille canoniquement associée est libre (resp. génératrice, une base).

Ceci dit, il vaut mieux, à mon avis, ne pas utiliser les parties qui contrairement aux apparences sont d'un emploi beaucoup plus délicat que les familles ou les n-uplets et qui souvent ne correspondent pas à la situation mathématique envisagée.

Quant à choisir entre familles et n-uplets, la question est moins simple. La première notion généralise la seconde, mais ce n'est pas une généralisation gratuite car elle est indispensable pour l'étude des espaces vectoriels de dimension infinie. On me dira que l'algèbre linéaire enseignée dans le second cycle ne concerne que les espaces vectoriels de dimension inférieure ou égale à 3, mais sans développer la theorie on peut faire démontrer facilement aux élèves que certains espaces de fonctions fort simples et très importants en analyse (espace des fonctions en escaliers, espace des fonctions polynomes) possèdent des familles libres de cardinal infini, autrement dit ne rentrent pas dans la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie.

Pour conclure, je crois que l'utilisation des parties est néfaste et que celle des n-uplets, dont la portée est suffisante en second cycle, peut fournir en Terminale une excellente introduction à celle des familles.

En tout cas, tout compromis, s'il n'est pas mathématiquement correct et c'est en général ce qui arrive, est à rejeter. Lorsque l'on dispose d'outils simples et efficaces — et c'est ici le cas — il n'y a aucune raison légitime de ne pas les utiliser, même si nous n'y sommes pas encore habitués ou si ceux-ci ne sont pas explicitement au programme.