

Us.: Ce part. prés. du vb. *déterminer* est souvent employé adjectivement dans la langue courante pour qualifier tout fait (acte, attitude, ...) dont l'influence est prépondérante dans un choix, une décision, un événement, etc. Les mathématiciens l'ont substantivé, dans la théorie des systèmes linéaires, avec un sens analogue: en effet le *déterminant* d'un système permet de décider si celui-ci a une solution unique ou non.

## 1. Algèbre linéaire

On rappelle que toutes les formes  $n$ -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension  $n$  sont proportionnelles. Par analogie avec le cas de l'espace usuel, nous appellerons *volumes* (orientés) celles de ces formes qui ne sont pas nulles (on peut dire aussi: tenseurs de volume).

1.1. *Déterminant d'un endomorphisme.* Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur un corps commutatif,  $f$  un endomorphisme de  $E$ , et  $\varphi$  un volume sur  $E$ : l'application

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \varphi(f(x_1), \dots, f(x_n))$$

est visiblement une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ , elle est donc proportionnelle à  $\varphi$ ; c'est-à-dire qu'il existe un scalaire  $\lambda$  tel que, quels que soient les  $x_i$ :

$$\varphi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \lambda \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

De plus, si l'on remplace  $\varphi$  par un autre volume — nécessairement proportionnel à  $\varphi$  — le  $\lambda$  de l'égalité précédente ne change pas. Il ne dépend donc que de  $f$ , on l'appelle *déterminant* de  $f$  et on le note  $\det f$ . On a alors, quels que soient les  $x_i$  de  $E$ , quel que soit l'endomorphisme  $f$  de  $E$ , quelle que soit la forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  sur  $E$ :

$$\varphi(f(x_1), \dots, f(x_n)) = (\det f) \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

*Propriétés.* Il est aisé de voir que  $\det I_E = 1$ , que  $\det (g \circ f) = (\det g) (\det f)$ , et que l'endomorphisme  $f$  est bijectif si et seulement si  $\det f$  est non nul; alors on a  $\det (f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$ . De là

résulte qu'une équation linéaire telle que  $f(x) = b$ , où  $b$  est un vecteur donné de  $E$  et  $f$  un endomorphisme de  $E$ , a une solution et une seule si et seulement si  $\det f \neq 0$ .

L'application  $\det$  n'est linéaire que si  $n = 1$ ; dans le cas général elle est homogène de poids  $n$ , c'est-à-dire que, quel que soit le scalaire  $s$ ,  $\det (sf) = s^n \det f$ .

1.2. *Déterminant d'une matrice carrée.* On appelle déterminant d'une matrice carrée d'ordre  $n$ , à composantes dans un corps commutatif  $K$ , le déterminant de l'endomorphisme de  $K^n$  qu'elle représente dans la base canonique. Dès lors on montre que les matrices qui représentent dans diverses bases un même endomorphisme ont toutes le même déterminant.

Le volume canonique de l'espace  $K^n$  est tel que le volume des vecteurs de la base canonique, dans l'ordre, est égal à 1. Il en résulte que le déterminant d'une matrice carrée est égal au volume de ses colonnes, dans l'ordre.

*Rem. 1.* Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\varphi$  le volume sur  $E$  tel que  $\varphi(e_1, \dots, e_n) = 1$ . Appeler  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  "déterminant du  $n$ -uplet de vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$ ", comme on le fait parfois, revient à sous-entendre, voire à oublier: "par rapport à la base  $(e_1, \dots, e_n)$ ". Cet oubli n'a pas d'importance si l'on ne s'intéresse qu'à la nullité du déterminant; sinon cette façon de faire n'est pas heureuse: il vaut mieux préciser un "volume" unité sur  $E$ , puis parler de "volume" d'un  $n$ -uplet de vecteurs, et réserver le mot "déterminant" pour les endomorphismes et les matrices.

*Rem. 2.* Le déterminant d'une matrice  $M$  s'écrit évidemment  $\det M$ . On trouve aussi la notation

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{au lieu de:} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

qui est cependant préférable. De toute façon ces deux notations ne désignent autre chose, ici, que le nombre 11, et il est dénué de sens de parler des lignes ou des colonnes de ce déterminant. En revanche on peut parfaitement dire: "le déterminant d'une matrice est changé en son opposé quand on échange deux colonnes de cette matrice", ou des phrases analogues.

On démontre que le déterminant d'une matrice A, de composantes  $m_j^i$ , est égal à  $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) m_1^{\sigma(1)} \dots m_n^{\sigma(n)}$ , où  $S_n$  désigne le

groupe des permutations de  $\{1, \dots, n\}$ , et  $\text{sgn}(\sigma)$  la signature de la permutation  $\sigma$ . On voit alors que le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée; il en résulte que le déterminant d'une matrice est égal au volume de ses lignes, dans l'ordre. En notant  $M_i^j$  le déterminant de la matrice qu'on obtient en rayant dans la matrice A la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne, on peut développer le déterminant de A soit par rapport aux éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne, soit par rapport aux éléments de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice A, ce qui donne respectivement:

$$\sum_{1 \leq j \leq n} (-1)^{i+j} m_j^i M_i^j \quad \text{ou :} \quad \sum_{1 \leq i \leq n} (-1)^{i+j} m_j^i M_i^j .$$

## 2. Analyse: Déterminants fonctionnels.

2.1. *Jacobien.* Soit  $F = [(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_n)]$  une application différentiable d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le déterminant de l'endomorphisme  $F'(x_1, \dots, x_n)$ , qui est aussi le déterminant de la matrice des dérivées partielles des  $n$  fonctions  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto y_j$ , est appelé *jacobien* de  $F$  au point  $(x_1, \dots, x_n)$ ; on utilise parfois

maintenant le mot *jacobienn*e pour désigner la matrice des dérivées partielles elle-même, qui représente  $F'(x_1, \dots, x_n)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

Le jacobien précédent est noté aussi (par abus)  $\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ .

Cette notation, qui, d'ailleurs, ne constitue pas un rapport, se comporte comme telle dans un changement de variables:

$$\frac{D(z_1, \dots, z_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \frac{D(z_1, \dots, z_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)},$$

ce qui explique son emploi.

Cependant le jacobien, comme tout déterminant, peut être interprété comme le rapport de deux volumes, ce qui laisse présager son rôle lorsqu'on passe de la variable  $(y_1, \dots, y_n)$  à la variable  $(x_1, \dots, x_n)$  lors d'une intégration dans  $\mathbb{R}^n$ .

Notons de plus que le jacobien joue un rôle important dans la théorie des fonctions implicites.

2.2. *Hessien*. Soit  $f = [(x_1, \dots, x_n) \mapsto y]$  une application deux fois continûment différentiable d'un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . La dérivée seconde de  $f$  au point  $(x_1, \dots, x_n)$  peut être considérée comme une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbb{R}^n$ , dont la matrice représentative dans la base canonique est parfois appelée *hessienne* de  $f$  au point  $(x_1, \dots, x_n)$ ; c'est la matrice (symétrique) des dérivées partielles secondes de  $f$ . Le déterminant de cette matrice est appelé le *hessien* de  $f$  au point  $(x_1, \dots, x_n)$ ; on peut, si l'on veut, le considérer comme le jacobien du gradient de  $f$ .

La notion de hessien, qui se généralise à la géométrie différentielle, a été introduite, historiquement, par l'étude des courbes algébriques.

2.3. *Wronskien*. Soient  $g_1, \dots, g_n$   $n$  applications  $n - 1$  fois continûment différentiables d'un intervalle  $]a, b[$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On appelle *wronskien* de la famille  $(g_i)_{1 \leq i \leq n}$  au point  $x$  le déterminant

$$\text{dét} \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_n(x) \\ g'_1(x) & g'_2(x) & \dots & g'_n(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^{(n-1)}(x) & g_2^{(n-1)}(x) & \dots & g_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Si la famille est liée, il est clair que son wronskien est nul en tout point de  $]a, b[$ . La réciproque n'est vraie que sous réserve: si le wronskien est nul en tout point de  $]a, b[$ , il existe au moins un sous-intervalle de  $]a, b[$  sur lequel les restrictions des  $g_i$  constituent une famille liée, mais la famille  $(g_i)$  ne l'est pas nécessairement elle-même. Ainsi les fonctions  $x \mapsto x^3$  et  $x \mapsto |x^3|$ , dont le wronskien est nul sur  $\mathbb{R}$ , ne sont pas linéairement dépendantes, mais seulement leurs restrictions à  $\mathbb{R}^+$  et leurs restrictions à  $\mathbb{R}^-$ .

Le wronskien est utilisé dans l'étude des équations différentielles linéaires. En particulier, si la famille est constituée de solutions d'une équation différentielle linéaire et homogène d'ordre  $n$  à coefficients continus dont le coefficient de la dérivée  $n^{\text{ième}}$  ne s'annule pas sur  $]a, b[$ , et si le wronskien a une valeur différente de 0 en un point de  $]a, b[$ , on montre qu'il ne s'annule en aucun point de  $]a, b[$  et que la famille est une base de l'espace des solutions ("système fondamental" de solutions).

★ Cette fiche annule et remplace la fiche de même indicatif publiée avec le n° 293.