La droite et le plan de quatrième et de troisième
présentés comme espaces "à repérage variable"

par Lucien BENETEAU - I.R.E.M. de TOULOUSE

Un "espace repéré" de dimension n sur le corps K est un ensemble **E** muni d'une bijection ρ de E sur K^n. La donnée du repérage ρ permet de définir certaines notions dans E, par transport de la structure de K^n. Lorsqu'on se permet de changer de repérage dans certaines limites, un problème se pose : quelles sont les notions qu'un tel changement ne modifiera pas ?

Cette question, l'élève se la pose pour la première fois dans la droite graduée (D,g) lorsqu'on se permet de "faire glisser la règle" (c'est-à-dire de remplacer g par $g' = g + c$). Il est clair que l'origine, l'abscisse ne peuvent plus être définis de façon intrinsèque ; mais $\overline{AB}$? la distance ? le milieu ? ... Ainsi détermine-t-il les notions axiales. Ensuite, il se permet de "changer le sens" de la graduation, et seules les notions euclidiennes peuvent être définies intrinsèquement. Enfin, il se permet de multiplier la graduation par une constante ; cette nouvelle indétermination fait disparaître la distance, et seules demeurent les notions affines.

Une recherche analogue peut être menée dans un *plan repéré* (P,ρ). A partir d'un seul *repérage* ρ (bijection de P sur R^2) on définit la totalité des notions usuelles : droites, vecteurs, orthogonalité, distance... *La distinction entre notions affines et notions euclidiennes s'établit*, non point par le fait qu'elles figurent dans des chapitres différents, mais *en fonction de leur invariance pour certains changements de repérage*. L'élève découvre ainsi une géométrie plane où l'assertion de Thalès n'est plus qu'un théorème anecdotique. Mais avant d'en aborder l'étude nous allons reprendre celle de la droite graduée afin de souligner les similitudes.

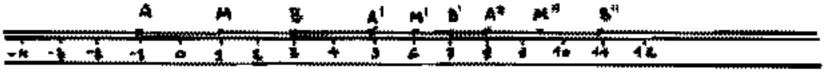
I — LA DROITE GRADUEE :

Ce sera un couple (D,g) où g est bijective de D sur R. Intuitivement, c'est un ensemble D "muni" de la *graduation* g, qui pour l'instant est parfaitement déterminée ("la règle est fixe"). En fonction de cette seule graduation, on définit d'emblée la totalité des notions usuelles (voir tableau), en ayant bien soin de ne pas les

Cette *notion* : ...	... a-t-elle une *définition dans (D,g)* : ...	qui reste inchangée si on s'autorise à remplacer g par : $g' = g + c$?	$g'' = \pm g + c$?	$g'' = ag + c$?
— l'Abscisse d'un point A	$= g(A)$	Non		
— l'origine	le point O tel que $g(O) = 0$	Non		
— $\overline{AB}$	$= g(B) - g(A)$	Oui	Non	
— l'ordre : $A \leqslant B$	$\Leftrightarrow g(A) \leqslant g(B)$	Oui	Non	
— la distance $d(A,B)$	$= \lvert g(B) - g(A) \rvert$	Oui	Oui	Non
— le rapport $\left(\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}\right)$	$= \dfrac{g(Q) - g(P)}{g(S) - g(R)}$	Oui	Oui	Oui
— le barycentre de (A,α) . (B,β)	le point C tel que $g(C) = \dfrac{\alpha g(A) + \beta g(B)}{\alpha + \beta}$	Oui	Oui	Oui
— le Milieu de $\{A,B\}$	le point M tel que $g(M) = \frac{1}{2}\{g(A) + g(B)\}$	Oui	Oui	Oui
— la demi-droite positive d'origine A	l'ensemble des M tels que $g(M) \geqslant g(A)$	Oui	Non	
— la demi-droite négative d'origine A	l'ensemble des M tels que $g(M) \leqslant g(A)$	Oui	Non	
— les demi-droites d'origine A	la demi-droite positive et la négative	Oui	Oui	Oui
	Nature de la notion :	Axiale ?	Euclidienne ?	Affine ?

définir les unes par rapport aux autres (*). Ce n'est que par la suite qu'on les classera d'après l'invariance de leurs définitions, et que des rapports seront établis entre elles.

Bien entendu chaque définition doit être dégagée d'une étude expérimentale. Pour le milieu par exemple, faire construire sur une droite (physique) munie d'une règle le milieu de plusieurs bipoints :



... puis, sur un tableau portant le relevé des abscisses, faire chercher la formule qui donne celle de M en fonction de celles de A et B.

Pour le barycentre, faire chercher le centre de gravité d'une tige graduée portant des poids.

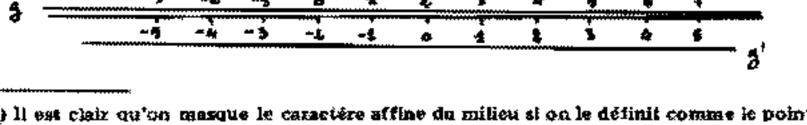
Comme on dispose déjà dans la droite graduée de toutes les notions, on peut faire des exercices très divers comme par exemple celui-ci, qui prépare l'étude des transformations planes :

— Quel est le produit de deux symétries centrales de (D,g) ? ... En déduire que les isométries de la droite sont les symétries et les translations.

II — DISTINCTION ENTRE NOTIONS AXIALES, EUCLIDIENNES, AFFINES

— "Qu'est-ce qui reste inchangé lorsqu'on fait glisser la règle ? " Pour répondre à cette question il faut :

1°) *Déterminer les graduations que l'on peut obtenir ainsi* ; et bien qu'il s'agisse de constatations expérimentales, on doit procéder par analyse et synthèse : dans la figure ci-dessous :



(*) Il est clair qu'on masque le caractère affine du milieu si on le définit comme le point équidistant de A et B. De même la notation usuelle $\frac{\overline{PQ}}{\overline{RS}}$ tend à faire penser que le rapport est, comme $\overline{PQ}$, une notion axiale non euclidienne, alors que c'est une notion affine !

... on note que pour plusieurs points M on a : $g'(M) = g(M) + 2$ (et on l'admet pour les autres) ... *Réciproquement* si on a par exemple : $g' = g-3$, peut-on faire glisser la règle de façon qu'elle représente g' ? ...

Ainsi la famille des graduations correspondant aux différentes "positions permises" de la règle est une classe d'équivalence dans Bij (D, R) pour la relation : $g \sim g' \Leftrightarrow (\exists\, c \in R)\,(g' = g + c)$.

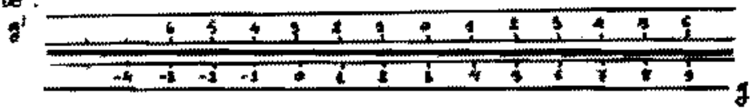
C'est cette classe $\mathcal{F}$ qui constitue la ***structure d'axe de (D,g)*** *(cf. (1))*

2°) ***Remplacer formellement g par $g' = (g+c)$ dans les définitions posées dans (D,g), et voir si la nouvelle définition équivaut à l'ancienne. Ainsi, à partir de :***

$g(M) = \frac{1}{2}\left(g(A) + g(B)\right)$ on obtient l'égalité

$g(M) + c = \frac{1}{2}\left(g(A) + g(B) + 2c\right)$, qui définit bien le même point M. Le milieu est donc une "notion axiale".

Par la suite, on se donne plus de liberté dans le maniement de la règle : on se permet de la faire éventuellement passer de l'autre côté :

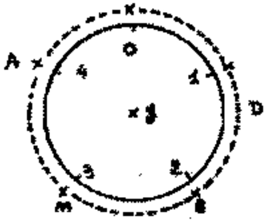


Même progression que précédemment : sur un tableau portant des relevés d'abscisses selon g et g' les élèves ne tarderont pas à remarquer que $(g+g')$ est constante. Ainsi toutes les graduations obtenues par glissements ou retournements de la règle vérifient : $g' = \pm g + c$. On constate la réciproque sur des exemples. Puis, ayant défini la structure euclidienne F, on cherche les définitions invariantes lorsque g' parcourt F (1).

La détermination des notions affines se fait elle aussi en deux phases (cf. (2)) : recherche expérimentale de la définition d'une structure affine Φ (au sens de (1)), puis élimination des notions qui ne sont pas indépendantes du choix de g' dans Φ (essentiellement la distance).

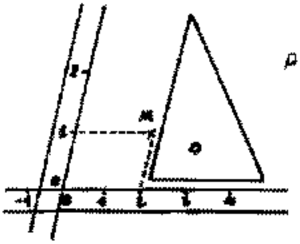
Notes : On pourrait chercher de la même façon les notions spécifiques d'autres structures de droite ; par exemple ***la structure affine orientée*** : on se permet de faire glisser la règle, de l'étirer ou de la rétracter, sans la changer de côté. Les graduations obtenues forment une classe pour la relation "$(g' - ag)$ constante, avec $a > 0$".

Par ailleurs, nous n'avons parlé que de droite graduée réelle. Je laisse au lecteur le soin de voir le parti qu'on pourrait tirer de l'étude préalable de *droites graduées par un corps fini* (Exemple ci-contre : $\frac{Z}{(5)}$).



III — LE PLAN REPERE

Ce sera un couple (P,ρ) formé d'un ensemble P muni du *repérage* ρ de P sur R^2. Une représentation concrète en est donnée par le plan physique muni de deux règles fixes ; pour déterminer le couple $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ qui correspond à un point M, on pourra se servir d'une "équerre gauche", ou mieux : d'un "papier millimétré affine" :



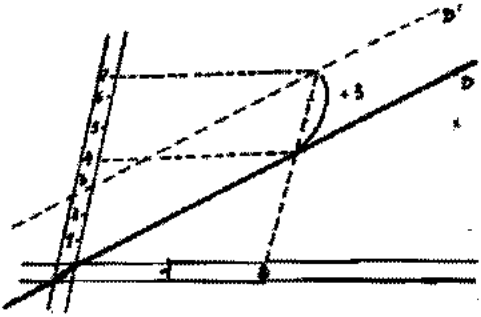
$$\rho\ (M) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Les droites seront les sous-ensembles D de P formés de points M dont les coordonnées $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \rho(M)$ vérifient une relation du type :

$$y = ax + b \ , \text{ ou bien : } x = c$$

Là encore cette définition doit apparaître comme une mathématisation de ce qu'on aura constaté dans le plan physique repéré :

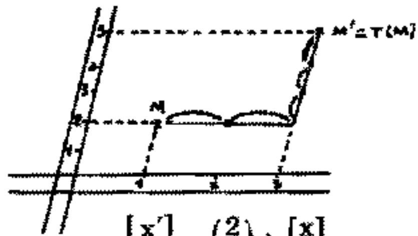
Après avoir relevé les coordonnées $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de plusieurs points d'une droite D passant par l'origine, on demandera quelle relation lie x et y ? ... Et réciproquement si $y_o = 2x_o$ le point M_o est-il sur D ? ...



Ainsi trouvera-t-on l'équation des droites passant par 0, et celle des autres s'en déduira par différence ($y' = y + 3$). Par la suite on étudie l'intersection de deux droites et on en déduit *les théorèmes d'incidence.*

La translation T de composantes $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ sera l'application qui à un point M de coordonnées $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \rho(M)$ associe M' de coordonnées $\begin{bmatrix}X+x\\Y+y\end{bmatrix}$. Le vecteur associé V sera par définition le graphe de T $\big($c'est-à-dire l'ensemble des couples (M,M') avec $M' = T(M)\big)$.

On pourra par exemple présenter la translation de composantes $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ à partir du déplacement qui consiste, dans le plan physique repéré, à "*faire deux pas vers la droite et trois pas vers le haut*".



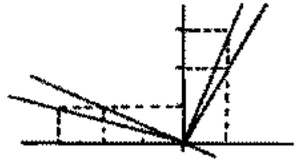
$$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

En effectuant successivement deux déplacements de ce type, on pressent (ce qui d'ailleurs est facile à montrer) que le produit $T' \circ T$ de deux translations est encore une translation ; ses composantes sont sommes de celles de T et T', ce qui suggère de noter son graphe (V + V').

Enfin on constate que répéter deux fois (resp. trois fois) le même déplacement $\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$ revient au même qu'effectuer le déplacement $\begin{pmatrix}2X\\2Y\end{pmatrix}$ (resp. $\begin{pmatrix}3X\\3Y\end{pmatrix}$). Il est donc naturel de définir λV comme le vecteur de composantes $\begin{pmatrix}\lambda X\\\lambda Y\end{pmatrix}$.

De la distributivité de cette loi externe par rapport à l'addition vectorielle, on déduit *le théorème de Thalès* : pour montrer que le rapport $\left(\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}\right) = \lambda$ se conserve par projection, il suffit de considérer le point B' pour lequel $\overrightarrow{A'B'} = \lambda.\overrightarrow{AB}$, et de remarquer que $\overrightarrow{OB'} = \lambda.\overrightarrow{OB}$.

Nous avons manipulé jusqu'à présent dans un plan physique repéré quelconque, mais il faut absolument reprendre une "représentation orthonormale" (papier millimétré ordinaire) pour que les élèves découvrent une relation simple entre les pentes de deux droites orthogonales (construites avec l'équerre). Ils seront conduits à poser que *les droites d'équations* :



$y = ax+b$ (resp. $y = c$) et $y = -\dfrac{1}{a}x + b'$ (resp. $x = c'$) *sont perpendiculaires.*

Lorsque des vecteurs V et V′ ont des représentants portés par des droites perpendiculaires ils seront dits orthogonaux. La norme ayant été définie par $\|V\| = \sqrt{X^2 + Y^2}$ on remarquera que l'identité :

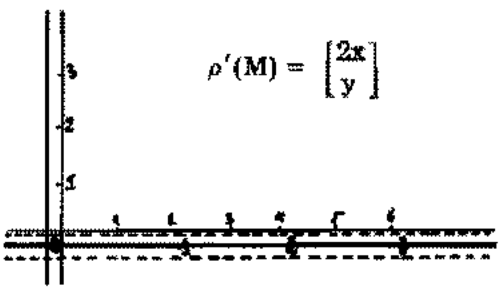
$$\|V + V'\| = \|V\|^2 + \|V'\|^2 + 2(XX' + YY')$$

se simplifie lorsque $V \perp V'$ (cf. (4)) ; d'où Pythagore ...

IV — CHANGEMENTS DE REPERAGE

Laissons là l'étude de la géométrie euclidienne pour étudier l'invariance des définitions posées. Nous allons remplacer ρ par un nouveau repérage ρ' défini par : $\rho'(M) = \begin{bmatrix} x' \\ y \end{bmatrix}$ avec $x' = ax + c$.

Comme sur la droite, on étudie successivement les cas $a = 1$, $a = \pm 1$ et a quelconque $\neq 0$. Les deux premiers cas correspondent à des déplacements des règles le long de l'axe des abscisses (avec un changement de signe de la règle des abscisses si $a = 1$). Ils entraînent peu de modifications, à part le changement d'origine. Les translations restent les translations, bien que leurs composantes soient modifiées lorsque $a = -1$. Les droites restent les droites, bien que leurs équations ne soient plus les mêmes ; la perpendicularité, la norme s'expriment par les mêmes relations.



Par contre si $a \neq \pm 1$, la "perpendicularité" obtenue en transposant sur les nouvelles coordonnées les définitions que nous avions posées donnera lieu à une notion manifestement différente. De même la norme $\sqrt{X'^2 + Y'^2}$ n'est pas toujours égale à celle que nous avions au début, et de ce fait la distance est modifiée. On perçoit donc nettement la différence de nature entre ces notions et les translations, les droites, qui restent inchangées.

On peut définir un plan affine comme un ensemble P muni d'un repérage ρ et de tous ceux qui s'en déduisent par un changement de coordonnées du type :

$$\begin{cases} x' = a_1 x + c_1 \\ y' = a_2 y + c_2 \end{cases}$$

Mais avec une telle définition de la structure affine de P, on ne peut pas, comme dans la droite affine, associer à chaque repère (O,I,J) un repérage unique de la famille l'appliquant sur $\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$. Ceci n'est vrai que si on considère une classe de repérages pour la relation :

$\rho' \sim \rho \Leftrightarrow$ Il existe un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$, ℓ, et une constante $k \in \mathbb{R}^2$ tels que : $\rho' = \ell \circ \rho + k$

En outre, une telle famille de repérages est par exemple maximale pour l'invariance de la définition des droites.

Mais faut-il absolument donner aux élèves une définition du plan affine ? A l'encontre des anciens programmes qui d'emblée se plaçaient dans un contexte métrique, les programmes actuels ont voulu séparer les notions affines des autres ; n'est-il donc pas plus important de leur donner *un critère de distinction* ?

V — CONCLUSION

L'itinéraire que nous venons de suivre est notablement différent de ceux que proposent les Commentaires et ses différentes annexes, où les propriétés sont déduites d'un petit nombre d'axiomes judicieusement choisis. Mais je pense comme Jean Dieudonné que les présentations analytiques sont appelées à prendre de plus en plus d'importance ; de fait, elles permettent une meilleure assimilation des propriétés de réels, et elles préparent mieux aux programmes du second cycle. Celle que je propose a en outre l'avantage de réunifier les géométries de la Droite et du Plan ; et le rôle primordial joué par les manipulations dans la recherche des définitions assure une bonne continuité avec la cinquième (pour une préparation possible en cinquième, voir (5)).

BIBLIOGRAPHIE

(1) — Commentaires du 22 Novembre 1971.

(2) — *Géométrie de la droite* (L. BENETEAU). Publication de l'I.R.E.M. de Toulouse (en préparation).

(3) — *Axiomatisation de la droite* (F. COLMEZ). Bulletin A.P.M. 279 (Mai-Juin 72).

(4) — *Une nouvelle approche de la géométrie plane de quatrième et troisième : Le plan repéré* (L. BENETEAU). Publication de l'I.R.E.M. de Toulouse.

(5) — *Quadrillages* (Groupe de Lyon). Bulletin A.P.M. 272 (Nov.-Déc. 69).