

1

DANS NOS CLASSES

La mise en pièces de la géométrie

par Pierre GAGNAIRE (I.R.E.M. de Lyon)

Le programme actuel (1) de mathématique pour la classe de quatrième comporte ceci :

“III Géométrie de la droite

Nota — On s'efforcera de présenter la géométrie née de l'expérience comme une véritable théorie mathématique. A la fin de l'année, les élèves devront avoir assimilé les notions et les résultats dont la liste va suivre, mais on prendra bien soin de ne pas anticiper sur le programme de géométrie de la classe de troisième. Le professeur est libre de choisir les modes de définition et les résultats qui seront admis (axiomes) et ceux qu'il déduira des précédents (théorèmes). L'énoncé des résultats admis sera précédé de nombreuses manipulations (usage des instruments de dessin, etc ...) qui les prépareront ...”

Il y a une quinzaine d'années certains de mes élèves provoquaient mon irritation, que je croyais alors fondée, par des questions du genre suivant : “Monsieur, doit-on apporter demain le cahier de mathématiques ou celui de géométrie ? ”

Visiblement, pour eux, les mathématiques (ce mot n'était pas encore singulier) comprenaient l'arithmétique et l'algèbre, “les chiffres, quoi”, et excluaient les “formes”.

J'avais beau leur expliquer que la géométrie était partie intégrante de notre belle science, “une véritable théorie mathématique”, ce n'est que pour me faire plaisir qu'ils avaient l'air d'être persuadés ... jusqu'à la prochaine fois.

(1) Cet article est écrit le 28 février 1973.

En fait, ils avaient raison mais j'avoue sans honte l'avoir compris depuis très peu de temps.

La Régionale de l'A.P.M.E.P. de Lyon a organisé une table ronde sur la géométrie.

Du compte-rendu publié dans le Bulletin n° 8 (janvier 1973) pour la séance du 13 décembre 1972, j'extrait les phrases suivantes :

"Bouvier : Qu'est-ce qu'une situation géométrique ?

Braemer : C'est une situation où l'on peut faire un dessin, où le dessin peut donner une idée ... En propédeutique (l'année qui suit le baccalauréat), j'ai constaté que peu d'étudiants ont l'idée de faire des dessins.

Duvert : ... en pratique, avec l'élève, il est difficile de séparer réellement l'aspect affine de l'aspect métrique.

Braemer : Deux défauts des programmes qui sont les reflets des défauts des mathématiques françaises :

1. On ne peut pas parler d'une question sans en avoir fait les fondements (influence de Bourbaki)
2. Il est absurde de cloisonner géométrie affine et géométrie métrique. C'est du purisme."

Dans un document récent de l'I.R.E.M. de Lyon, on peut lire :

"Cette méthode [la présentation du produit scalaire en classe de troisième] favorise une bonne séparation entre le domaine mathématique (déduction-construction) et le domaine physique (représentation)."

Certains collègues pensent que les "nouveaux programmes" permettent de mieux séparer ce qui est "théorique" de ce qui est "concret", alors qu'autrefois, "on ne savait jamais dire exactement si tel ou tel résultat était admis parce que vu sur la figure ou rigoureusement démontré".

D'aucuns pourront se demander s'il peut se faire qu'une séparation, en ce domaine, puisse être qualifiée de bonne (voir la dernière citation de Braemer, pour une question différente, certes, mais voisine ; au reste, pour certains d'entre nous, métrique ne deviendrait-il pas synonyme d'expérimental, par opposition à affine, synonyme d'axiomatique, de démontré ?)

Si on veut enseigner la géométrie (et mon avis est qu'on doit l'enseigner) il importe d'abord de se mettre d'accord, avec les élèves, au moins tacitement, sur ce que c'est.

Sinon, quel que soit le programme, on retombera dans les malentendus d'hier ou d'avant-hier : le même mot n'aura pas la même signification pour celui qui le prononce et pour celui qui l'entend.

Or l'enfant a déjà son idée sur la géométrie et, sans qu'on le lui demande, il se munit d'une règle graduée, d'un compas, d'une équerre et d'un rapporteur en prévision du cours de géométrie "dont le début ne saurait tarder" dit-il au mois de janvier, en quatrième.

Pour lui, la géométrie, avec laquelle il a déjà fait connaissance à l'école élémentaire ou même avant, c'est avant tout l'art de manipuler les instruments ci-dessus cités.

Voici quelques semaines, je pris ma plus belle bille (1) et rédigeai, à l'intention de mes collègues de l'équipe Galion, les feuilles que voici :

LA MISE EN PIÈCES DE LA GÉOMÉTRIE

① *Le matériel* : liste non limitative

Crayon (mine graphite, à bille, stylo, de couleur ...)

Gomme

Règle graduée : triple décimètre

Compas

Équerre : à 90°, 60°, 30°, 45°

Rapporteur

Papier : blanc, calque, quadrillé 5 × 5, millimétré.

② *Jeu de transmission*

Les élèves sont répartis en quatre groupes : A, B, C, D.

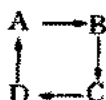
1. Chaque élève reçoit (voir page 19) :

- . une feuille portant un dessin : figure 1 pour le groupe A, 2 pour le groupe B, 3 pour le groupe C, 4 pour le groupe D ;
- . une feuille d'information en trois parties :
description ; questions ; réponses ;
- . une feuille de papier calque.

2. Chaque élève décrit, sur la feuille d'information, la figure qu'il a en sa possession, puis transmet sa feuille d'information à un élève d'un autre groupe, suivant l'un des schémas suivants :

(1) J'eusse dit jadis "plume".

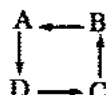
au 1er tour



au 2ème tour



au 3ème tour



3. Chaque élève essaie de dessiner sur son papier calque la figure dont il reçoit la description. Eventuellement, il demande des informations supplémentaires en posant, par écrit, des questions sur la feuille d'information qu'il retourne à celui qui a décrit la figure.
4. La figure réalisée sur calque est superposée à l'original.
5. Lors du deuxième tour, chaque élève doit à nouveau décrire la même figure que précédemment, mais à l'intention d'un nouveau correspondant.
On espère que la nouvelle description tiendra compte des difficultés rencontrées lors du premier tour.
6. A l'issue du troisième tour peut et doit s'engager une discussion au cours de laquelle seront précisés certains mots du vocabulaire géométrique intuitif des enfants. Aucune théorie ne sera faite à ce propos.

③ *Quels concepts peut-on approcher par les activités décrites en ② ?*

Distance, perpendicularité, parallélisme interviendront dans la description des figures, sous leur aspect métrique, qui est l'aspect usuel.

Les concepts d'intérieur et d'extérieur peuvent aussi être mis en évidence (voir figures ① et ④).

Ces mêmes concepts interviendront dans la réalisation sur papier calque des figures décrites. Des problèmes seront posés (même en quatrième !) par la construction de figures aussi simples que celles ici présentées, même si elles sont correctement décrites. D'autres figures seront d'ailleurs proposées. On peut ainsi espérer consolider "l'acquis intuitif" de l'enfant mais il est certainement illusoire de vouloir introduire par cette méthode une axiomatique de la géométrie et, à plus forte raison, une axiomatique privilégiant telle ou telle structure (voir actuel (1) programme de quatrième : géométrie affine de la droite et du plan).

(1) année scolaire 1972-1973

④ *Minimisation de l'information*

Au fur et à mesure que les concepts se préciseront, on pourra exiger que la description d'une figure se fasse d'une manière à la fois complète et minimale. On peut instaurer une compétition entre l'élève émetteur de l'information et l'élève récepteur, celui-ci critiquant l'insuffisance ou la redondance de cette information, celui-là réagissant éventuellement en démontrant (et ce mot prend alors tout son sens !) que la critique n'est pas fondée.

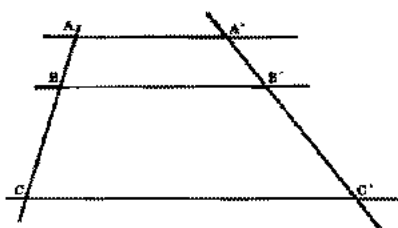
On peut ainsi approcher, d'une manière motivée, deux activités essentielles en mathématique :

- le choix d'informations jugées essentielles et minimales,
- le rétablissement des autres informations par voie déductive, à partir des précédentes ;

(on retrouve, d'une certaine manière, l'axiomatisation et le développement déductif d'une théorie).

Il doit être ainsi possible, en choisissant convenablement les figures à décrire, de provoquer la découverte de résultats intéressants qui, traditionnellement, sont connus sous le nom de théorèmes (2) de Thalès, de Pythagore, etc ...

Par exemple, la figure ci-contre peut être décrite, de manière redondante, par les informations suivantes :



parallélisme

des droites

AA', BB', CC' ;

mesures des

longueurs $AB,$

$BC, AC, A'B',$

$B'C', A'C'$;

mesures des longueurs AA', BB', CC' .

De la discussion d'une information minimale peut résulter l'énoncé de Thalès ou sa réciproque.

(2) ou d'axiomes

⑤ *L'outil vectoriel*

En distribuant des figures tracées sur papier quadrillé, et à reproduire sur papier calque posé sur papier quadrillé, on fera aisément découvrir la nécessité du repérage.

De plus, si on donne aux enfants un dessin obtenu en répétant un certain motif au moyen d'une translation, celle-ci apparaîtra certainement comme un moyen commode de minimiser l'information.

Enfin, la donnée d'un dessin sur quadrillage rectangulaire et sa reproduction (toujours après transmission) sur quadrillage oblique permettra de mettre en évidence le fait que l'alignement de points est de nature affine plutôt que métrique. On sera alors naturellement conduit à calculer sur les couples de réels (3), pour prévoir, par exemple, que tels et tels points sont alignés.

C'est à ce moment-là (et, je crois, à ce moment-là seulement) que l'on pourra dire que l'on fait de la mathématique. Ayant mis en évidence une structure intéressante, on l'étudiera en elle-même (il s'agit du vectoriel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$), étant sûr de pouvoir l'illustrer à chaque instant par une figure : le même élève jouera alors successivement les deux rôles (descripteur puis dessinateur) lorsqu'il aura à illustrer par un dessin une situation donnée sous forme numérique (coordonnées, translations, équations de droites ...) dans un problème.

Qu'importe la définition de la droite, celle des parallèles, les "axiomes d'incidence" desquels on déduit des trivialisés ! !

L'essentiel n'est-il pas que certaines structures (ici la structure vectorielle) apparaissent comme des outils qui permettent d'opérer efficacement dans une situation matérielle (la géométrie) mais sans, pour cela, tout accaparer (nos élèves ignorent le compas jusqu'à la fin du deuxième trimestre de troisième !).

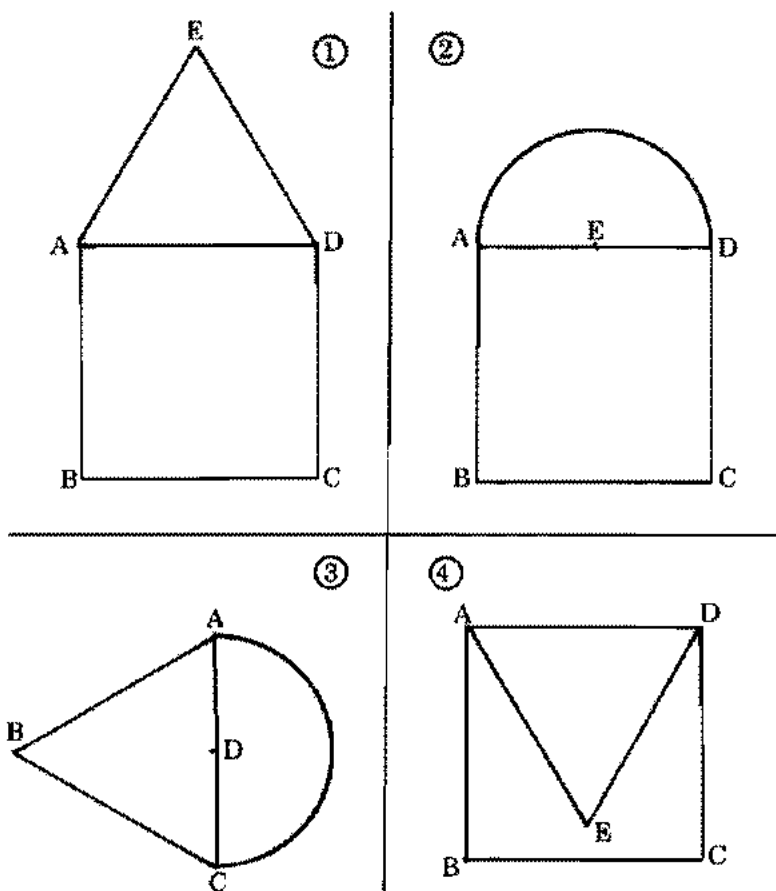
La théorie que l'on peut faire (et elle se fera tout naturellement "par le calcul") c'est celle de cet outil (théorique !) mais non celle de la géométrie (pratique !).

⑥ *Thème de recherche*

Je propose qu'une équipe se consacre à la recherche de figures à présenter, à faire décrire et à faire reconstruire de manière à établir une progression apte à faire acquérir les points essentiels

(3) couples d'entiers, dans un premier temps.

d'un programme, quel que soit (i.e. : choisi par l'équipe) ce programme fût-il l'actuel programme officiel de quatrième et troisième.



Quelques jours plus tard, je rédigeai une suite à ces réflexions, assortie de figures que, conformément au paragraphe ⑥, je me proposai de donner à mes élèves de quatrième, en vue de leur description par eux.

De plus, je rédigeai, à l'intention de ces mêmes élèves deux fiches d'explications que je leur remettrai, la première avec les dessins n° ①, ②, ③, ④, la deuxième avant les autres dessins.

⑦ *Souplesse de la méthode*

Au paragraphe ②, on a dit :

“Les élèves sont répartis en quatre groupes : A, B, C, D.”

Il n'y a là rien d'impératif.

On peut très bien envisager un partage en deux, trois, cinq, six groupes.

Si le sujet est vraiment important, le partage en un grand nombre de groupes obligera l'élève à lire et critiquer un grand nombre de descriptions ; il lui faudra aussi construire un grand nombre de figures. Le concept approché n'en sera que mieux introduit.

On peut aussi organiser des groupes “fictifs” : on partage la classe en cinq groupes et tous les groupes reçoivent la même figure (quels avantages peut-on tirer d'un tel procédé ?).

On peut aussi donner aux groupes différents des figures dans lesquelles certaines propriétés sont conservées d'un groupe à l'autre (c'est, par exemple, la même translation qui agit sur des motifs différents ...). Lors de la discussion, il sera facile d'insister sur les propriétés en question. L'introduction de l'homothétie, donc de la multiplication d'un vecteur par un réel, est certainement justiciable de cette méthode.

Enfin, on doit pouvoir tenir compte de la rapidité et de la lenteur de certains élèves : supposons la classe de 24 élèves divisée en six groupes de quatre élèves ; chaque élève doit :

1. établir une description
2. la perfectionner, éventuellement, cinq fois
3. lire et critiquer cinq descriptions
4. dessiner cinq figures
5. opérer cinq confrontations

Il n'est pas dit que l'élève n° 1 du groupe A devra commencer à transmettre son information à l'élève n° 1 du groupe B.

Il est préférable que le plus rapide du groupe A transmette son information au plus rapide de l'un quelconque des autres groupes, le premier échange se faisant entre ces deux élèves.

D'ailleurs, une trop grande rapidité dans 1. sera à coup sûr compensée par un temps plus long à répondre à des questions en retour et par un échec à 5. dans les cas les plus défavorables.

Au contraire, une description lente, mais correcte, suivie de l'exécution lente mais réfléchie et assortie de justes critiques pour une seule figure constitue un inconvénient mineur puisque,

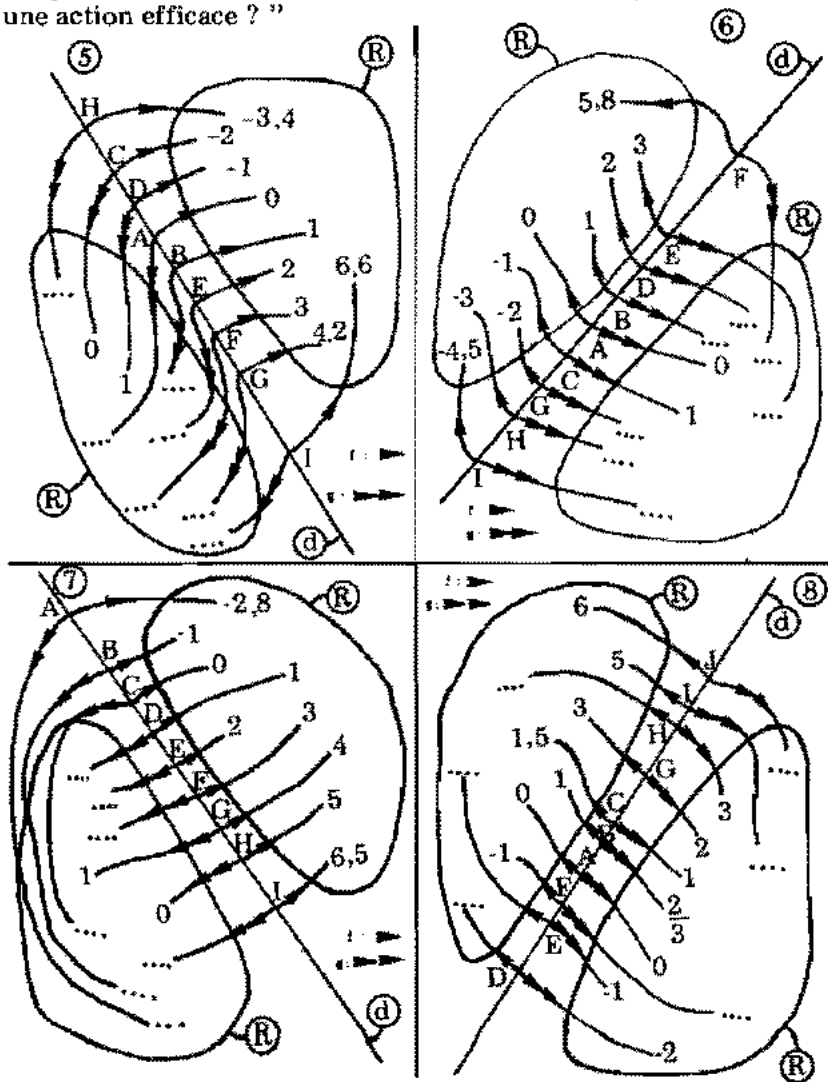
visiblement, l'élève a compris.

Il est à prévoir que, de toute façon, l'application de la méthode sera très lente, du moins au début.

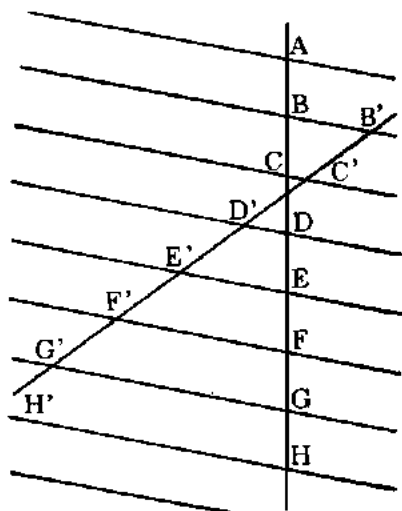
Mais Galion en a vu d'autres !

Et n'avait-il pas fait sa devise de la phrase suivante :

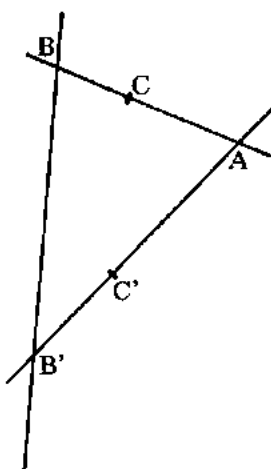
“Proposer aux enfants des situations qu'ils analyseront et desquelles seront tirés des concepts mathématiques permettant une action efficace ?”



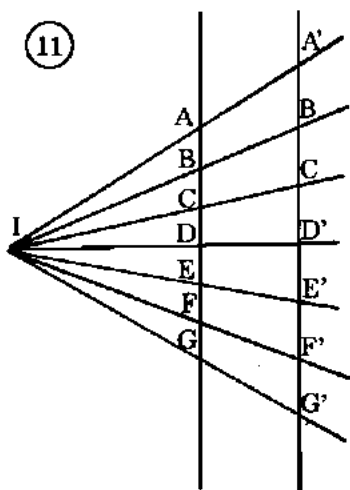
9



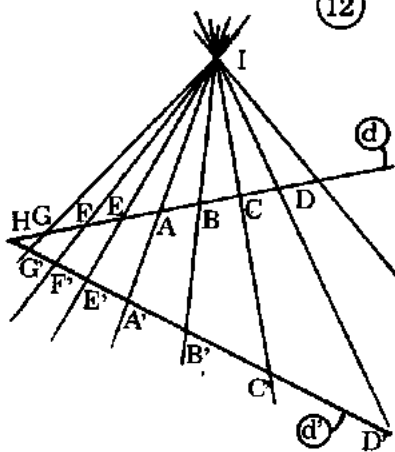
10



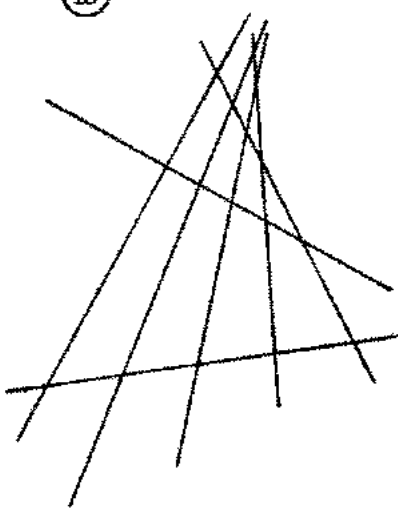
11



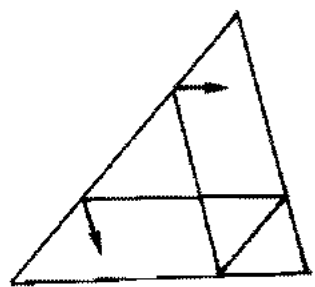
12



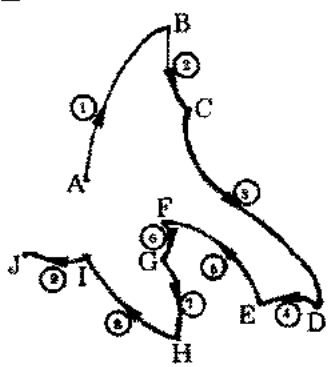
13



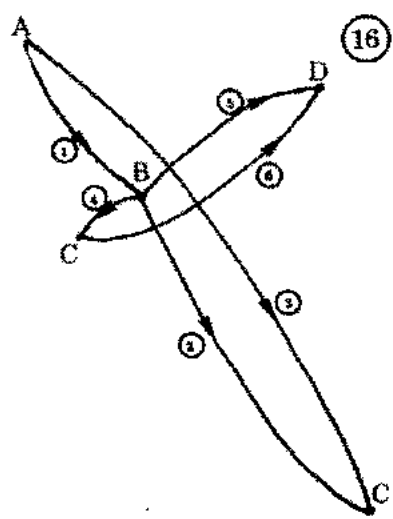
14



15



16



JEU DE TRANSMISSION

- ① Tu as reçu un dessin. Note son numéro ainsi que ton nom en bas et à gauche de cette feuille.
Tu vas décrire le dessin que tu as reçu avec le plus de précision possible (paragraphe 2).
Transmets ensuite cette feuille à un camarade qui n'a pas reçu le même dessin que toi.
Le reste des instructions intéresse celui qui reçoit cette feuille.
- ② *Description de la figure reçue*

Numéro du dessin NOM

Fiche élève n° 1 (verso)

- ③ Tu viens de recevoir cette *feuille d'information*.
A partir des renseignements fournis par ton camarade, essaie de dessiner, *sur papier calque*, la figure qu'il décrit.
Si ces renseignements te paraissent insuffisants, pose ci-dessous les questions que tu désires et renvoie cette feuille à son auteur : il te la retournera après réponse.
- ④ QUESTIONS REPONSES
- ⑤ Peux-tu maintenant dessiner la figure ? Sinon, pose de nouvelles questions. Si oui, fais-le (sur papier calque).
- ⑥ Superpose ton calque à la figure dont le n° est écrit de l'autre côté. Cherche d'où viennent les erreurs, s'il y en a.

Feuille reçue par

Fiche élève n° 2

Pendant les séances qui vont suivre, tu recevras des feuilles portant des dessins numérotés.

1. Comme précédemment, pour chaque dessin reçu, tu établiras une *feuille d'information* que tu transmettras à un camarade qui a reçu un dessin de numéro différent.
2. Tu essaieras chaque fois de décrire le dessin en donnant toutes les informations nécessaires et sans donner d'informations superflues.
3. Comme précédemment, tu recevras des *feuilles d'informations*. Tu devras dessiner une figure d'après chacune d'elles.
S'il te semble qu'il manque un renseignement, c'est :
 . ou bien que ton camarade a oublié de le donner
 . ou bien que tu peux le déduire des autres renseignements qu'il te donne.

Avant de le lui demander, cherche donc si tu ne peux pas le trouver tout seul ...

Si tu penses que ton camarade t'a donné un renseignement superflu, fais-le lui remarquer, en utilisant la colonne QUESTIONS de sa feuille d'information.

4. Si tu reçois un dessin sur papier quadrillé, note-le sur ta feuille d'informations : ton camarade exécutera alors sa figure sur le papier quadrillé qu'il possède. Vous comparerez facilement les résultats ensuite.

Les dessins ⑤ ⑥ ⑦ ont pour but de préparer la structure euclidienne de la droite : les formules

$$f(M) = g(M) + a$$

$$f(M) = -g(M) + a$$

qui ne seront pas données avant aux élèves, doivent apparaître, au cours de la discussion, comme un moyen "naturel" de minimiser l'information à transmettre.

Le dessin ⑧ introduit les changements d'unité.

Les dessins ⑨ ⑩ ⑪ ⑫ ⑬ ⑭ introduisent l'énoncé de Thalès et sa réciproque. On y trouve aussi des situations où l'une des hypothèses de cet énoncé (ou de sa réciproque) est niée : n'oublions pas la vertu du contre-exemple.

Enfin les dessins ⑮ ⑯ constituent une introduction aux notions d'équipollence, de translation et de composition des translations.

Il ne restait plus qu'à mettre en pratique les beaux projets qui précèdent, ce que je fis le mardi 6 février, au cours d'une séance de travaux dirigés.

Je distribuai à mes élèves la fiche n° 1 et, pour chacun des quatre groupes l'une des figures n° ① ② ③ ④ .

Tous les élèves, à l'exception d'un seul qui avait réduit son carré "afin, dit-il, qu'il puisse tenir dans mon calque que j'ai découpé trop petit", tous, donc, présentèrent un calque qui se superposait parfaitement à l'original.

Cela montrait, à l'évidence, que cette première expérience était un échec sauf en ce qu'elle avait fait toucher du doigt la possibilité de transmettre, en langage ordinaire, une information d'origine géométrique.

Or l'un des buts de la géométrie est précisément de faire acquérir un vocabulaire commode qui pourra plus tard servir dans des domaines variés : vie pratique aussi bien qu'algèbre supérieure.

Mais je reviens sur le mot échec. Dans de très nombreux cas, les figures furent dessinées exactement (comme le révélera la superposition ultérieure) à partir d'informations incomplètes, voire inexactes. Le "langage géométrique" faisait souvent place à des "notions" plus familières. Voici, par exemple, une description du dessin n°②:

"C'est une borne kilométrique de 6 cm de large et de 9 cm de haut." Carré ? demi-cercle ? ... connais pas ... !

Voici, pire encore, une description du dessin n° ① :

"Il y a 6 côtés de 6 cm." Et c'est tout !

Alors que je faisais remarquer à son auteur que l'un des "côtés", en l'occurrence AD, était en réalité une diagonale, le destinataire de la description arrivait pour contrôler son dessin sur calque. A ma grande surprise, c'était bien le dessin n° ① !!

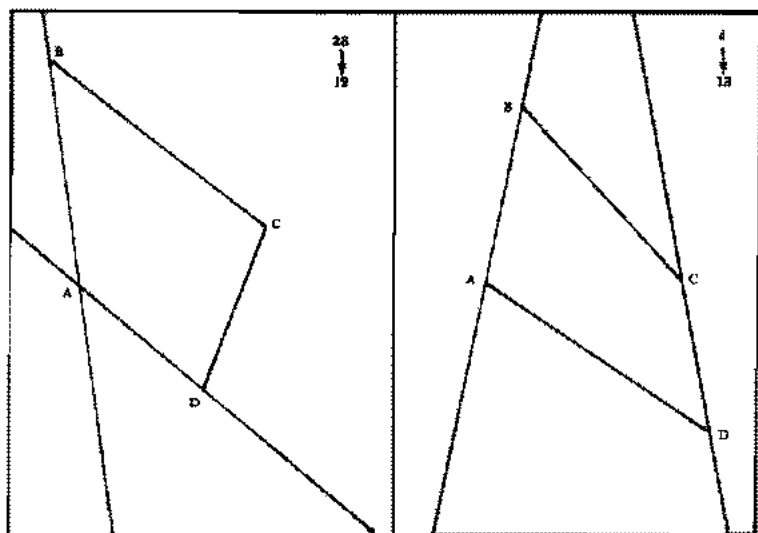
Très peu de descriptions étaient correctes (au sens du professeur de géométrie !) et pourtant les reproductions étaient exactes.

Une conclusion s'imposait :

1. Chaque dessin présenté était trop facile.
2. Chaque dessin comportait trop de référence à une intuition élémentaire chez certains élèves pour qui toute figure à quatre côtés est un carré. La transmission d'informations entre de tels

élèves est alors remplacée par un signal qui déclenche une sorte de réflexe ; l'aboutissement de ce réflexe ne peut être que l'expression d'une connaissance en définitive très pauvre, donc pratiquement prédéterminée : "quatre côtés ... c'est un carré". Malgré cette conclusion, je pense que cette expérience n'est pas entièrement négative, et j'ai déjà dit pourquoi.

Afin de mettre les choses au point, je passai une bonne partie du jeudi 8 février après-midi à dessiner trente et une figures, toutes différentes en ce qui concerne les dimensions, mais chacune de l'un des deux types suivants :



Les longueurs des segments AB, BC, CD, DA, AC étaient toutes choisies parmi les suivantes : 4 cm. 4,5 cm 5 cm 6 cm 7 cm.

Chaque figure comportait deux numéros séparés par une flèche : celui de l'élève qui recevait la figure et celui de l'élève auquel l'information devait être transmise. L'ensemble de la classe était ainsi organisé en un seul cycle, chaque élève étant en communication avec deux de ses camarades, qui disposaient chacun d'un dessin, d'un type différent du sien (1).

J'avais l'intention de viser par ce nouveau jeu de transmission, plusieurs buts :

(1) A une exception près, bien sûr, puisque 31 est impair.

1. "Casser le carré" par la présentation d'un quadrilatère "irrégulier".
2. Montrer la nécessité de transmettre des informations non évidentes sur la figure, comme, par exemple, la longueur des diagonales.
3. Distinguer, au moins en ce qui concerne la convention de dessin, la *droite* du *segment* de droite.
4. Surtout, voir ce que les élèves feraient ou ne feraient pas face à une situation qui, quoique simple, était nouvelle pour eux.

La description du dessin, l'échange de questions et réponses, l'exécution du dessin sur calque, la confrontation du résultat à l'original et, pour les plus avancés, la critique mutuelle du travail fait, tout cela prit une heure entière vendredi 9 février au matin.

Le dépouillement de ce travail occupa ma journée de lundi 12 février.

En voici les résultats.

1. Assez peu d'élèves (six) pensent à transmettre la longueur d'une diagonale.
2. Les élèves qui reçoivent cette information l'utilisent en général assez mal, par tâtonnement. *Aucun* n'utilise le compas. Visible-ment, pour eux, le compas est associé à l'idée de *cercle* (qui est une ligne *courbe*) ; or le dessin à reproduire ne contenait que des *droites* ou des segments de droite, et il ne vient à l'idée de personne qu'un segment de droite puisse être considéré comme le rayon (*non tracé matériellement*) d'un cercle.
3. Dix élèves ont utilisé un repérage pour décrire leur dessin.
Ce repérage se fait de diverses manières :
 - . distance des points A, B, C, D aux bords de la feuille (cette distance étant mesurée au double décimètre, sans tracé de perpendiculaire),
 - . tracé auxiliaire d'"horizontales" ou de "verticales" dont ils donnent la distance aux bords de la feuille et qu'ils recommandent bien d'effacer ensuite car il ne s'agit que "de point de repère qui ne figure pas sur le dessin".
4. Les élèves qui reçoivent ce type d'information réussissent bien, dans l'ensemble, la reproduction ... sauf, bien sûr, lorsqu'ils partent d'un calque dont les dimensions sont différentes du papier sur lequel on a tracé la figure d'origine. Les mesures de distance se font, encore, "horizontalement" ou "verticalement" sans tracé de perpendiculaires.

5. Une élève transmet l'information suivante :

"Entre le bord en haut de la feuille et la ligne tracée, il doit y avoir :

à gauche 3,9 cm
 au milieu 4,1 cm
 à droite 4,3 cm".

Cela laisse entrevoir l'énoncé de Thalès qui sert, en quelque sorte ici, de précaution ou de contrôle.

6. Un seul élève transmet une information angulaire. Son correspondant s'en tire très bien.
 7. Quelques élèves inventent des notations où l'on peut reconnaître un embryon de langage des applications :

" $(A \rightarrow B) = 4 \text{ cm} ; 4,9 \text{ cm} = (D \leftarrow A)(B \rightarrow C) = 4,5 \text{ cm}$ "

8. Six élèves disent de la figure donnée : "C'est un trapèze" alors que les côtés ne sont visiblement pas parallèles. Le mot "quadrilatère" ne figure pas dans leur vocabulaire et ils baptisent "trapèze" ... ce qui a quatre côtés sans être un carré, ou un rectangle, ou un losange. Au passage, je note la question et la réponse suivantes :

"Quelle est la hauteur du trapèze ? "


"En mettant l'équerre au milieu de BC : 4,1 cm" (1)

La réponse montre bien que, pour son auteur, le mot "trapèze" n'a rien à voir avec le parallélisme de deux côtés.

9. Le mot "intersection", bien connu des élèves lorsqu'il s'agit d'ensembles, paraît avoir un tout autre sens, pour ces mêmes élèves, en géométrie :

"D c'est le point d'intersection des deux lignes A et C"

"Qu'entends-tu par intersection ? "

"  voilà une intersection".

Il serait peut-être bon de proposer des exercices du type suivant :

trouver $a \cap b, c \cap d, g \cap g$



(1) C'est moi qui souligne.

L'analyse des réponses serait instructive !

10. Huit élèves ont soigneusement mesuré la longueur des "prolongements" des côtés du quadrilatère ABCD. Certains d'entre eux vont même jusqu'à donner la longueur du trait qui porte les points A et B et les distances de chacun de ces points aux extrémités du trait, le destinataire ne peut connaître la distance AB que par le calcul ...

Certes ces mesures montrent une volonté de bien faire. Elles montrent aussi la nécessité d'explicitier une *convention de dessin* concernant la représentation de la droite.

11. Certaines phrases sont révélatrices de l'idée que certains se font de la *droite* :

"A est sur la même ligne que D"

Tel élève refuse de répondre à une demande de dimension de son correspondant : "Question mal posée". Or la dimension demandée n'est pas prise sur une droite préalablement tracée ... Pour cet élève, il ne saurait y avoir de distance entre deux points non reliés par un trait !

"AC = 5, mais ce n'est pas en ligne droite, c'est en ligne penchée vers le haut puis vous l'effacerez, AC est pour vous repérer". A la suite d'une question de son correspondant, ce dernier élève confirme : "AC est penché vers le haut" alors que la droite AC est bel et bien "horizontale" (mais non tracée matériellement ...).

Cela montre que, pour ces élèves, l'axiome

"par deux points il passe une droite et une seule"

n'est nullement une vérité d'évidence et n'est vrai que si la droite est *matériellement* tracée.

12. Une élève baptise "diagonale" toute droite non parallèle à un bord du papier, ce que le destinataire n'arrive pas à comprendre. Un autre découvre un angle droit dans la figure et transmet cette information. Son correspondant questionne alors : "Quelle est la ligne horizontale ? la verticale ? ", car seules des droites de ces directions peuvent se couper à angle droit, bien sûr ! Le dessin est entièrement raté et on n'y retrouve aucun angle droit.

Certains avaient cru pouvoir reprocher aux "tenants de la mathématique moderne" de vouloir enseigner Bourbaki aux élèves de sixième, alors que "la théorie des ensembles, disaient-ils, ne peut servir qu'aux mathématiciens professionnels".

Or, chacun reconnaît aujourd'hui que l'enseignement de la mathématique en sixième et cinquième, suivant les nouveaux programmes et, surtout, avec les méthodes nouvelles, est un succès.

C'est que le reproche ci-dessus cité n'est pas fondé. Il n'a jamais été question d'enseigner la *théorie* des ensembles dans le premier cycle, mais de mettre à la portée des enfants le langage clair et précis des ensembles, et ce, au moyen de situations où ils peuvent agir.

Au contraire, chacun s'inquiète des difficultés auxquelles se heurtent nos élèves dès la quatrième. Ils sentent une rupture dans la méthode avec ce qu'ils ont fait avant. Les collègues aussi sentent bien cette rupture et il n'est pas besoin, pour eux, de présenter à leurs élèves la droite suivant la caricature qu'en donne le professeur Leray, pour ressentir une certaine gêne.

Je crois que l'origine de cette gêne se trouve (paradoxalement !) dans la phrase suivante du programme :

"Le professeur est libre de choisir les modes de définition et les résultats qui seront admis (axiomes) et ceux qu'il déduira des précédents (théorèmes)." (c'est moi qui souligne).

Eh bien non ! le professeur n'est pas libre ! Surtout pas dans ce domaine où les élèves sont convaincus de manipuler le réel, ou, du moins, une représentation qui en est très proche. Vouloir faire croire que telle ou telle propriété évidente des figures géométriques est conséquence de telle ou telle axiomatique (*quelle qu'elle soit*), c'est prétendre affirmer que le monde physique obéit à des lois arbitrairement édictées par je ne sais quel génie bon ou mauvais (s'appelât-il Euclide !).

C'est aussi confondre l'exploration d'une situation mathématisable, certes, mais non mathématique avec l'étude du développement d'une théorie.

Cette dernière étude est intéressante, *même pour les enfants*, mais ce n'est pas sur la géométrie qu'on le leur montrera. Ou bien, il faudrait développer des minithéories dont les axiomes seraient insuffisants pour décrire le réel et dont les résultats seraient assez pauvres.

Pourquoi ne pas faire pour la géométrie ce qui a été fait pour les ensembles ? Pourquoi ne pas enseigner le langage de la géométrie plutôt que la théorie de la géométrie (1) ? Pourquoi ne

(1) En fait on n'enseigne jamais qu'une théorie que l'on prétend ainsi privilégier parmi tant d'autres. Ce n'est pas très honnête, reconnaissons-le.

pas enseigner à reconnaître certaines propriétés intéressantes dans des situations données "concrètement" et à utiliser ensuite ces propriétés pour construire d'autres situations ?

L'enseignement de la géométrie, c'est aussi l'enseignement d'un certain nombre de "savoir faire".

N'oublions pas que le premier théorème d'Euclide est celui qui affirme la possibilité de construire un triangle équilatéral de côté donné. On sait que la démonstration donnée par Euclide lui-même met en jeu un axiome non explicité préalablement. Mais ce qui fait la valeur du théorème I, ce n'est pas tant sa démonstration que la communication d'un "savoir faire" : "Si vous voulez construire un triangle équilatéral sans tâtonner, prenez-vous y ainsi : ... opérez de telle et telle manière : ... utilisez tels instruments : ..."

L'expérience ci-dessus décrite montre que le procédé qui consiste à tracer au compas une figure qui, finalement, ne comporte que des segments de droite, n'est pas si naturel ! L'élève à qui on enseignera une telle chose aura vraiment l'impression d'*apprendre* du nouveau (et de l'efficace !), et non de "démontrer" des trivialités. Ainsi mis en confiance, c'est lui qui finira par poser des questions "théoriques" sur ce qu'il observe et alors, mais seulement alors pourront se construire ces "îlots déductifs" dont certains parlent. Comment faire pour résoudre (ou plutôt : pour inciter à résoudre) un problème qui ne se pose pas ?

Comment faire croire qu'un problème se pose quand l'enfant en a la solution sous les yeux ?

.....

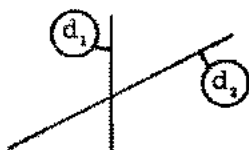
Les activités de repérage peuvent donner l'occasion de poser des problèmes. D'abord, comme on l'a vu plus haut, la nécessité du repérage semble claire pour les élèves. Ensuite, il semble normal de repérer les formes compliquées par rapport à des formes plus simples : le cadre rectangulaire du dessin, par exemple. Et si celui-ci n'existait pas ? Il paraît indispensable de pouvoir reconstituer un repère qui soit *le même pour tous* et, pour cela, de pouvoir transmettre des informations *métriques* où les distances sont mesurées avec le même étalon (depuis la Convention, comme chacun sait !).

Convenons donc de repérer chaque point de la figure "par rapport" à deux droites. Le fait que ces deux droites doivent permettre le repérage de n'importe quel point entraîne qu'elles

doivent être tracées le plus long possible (c'est à l'usage qu'on voit la différence de nature entre droite et segment !).

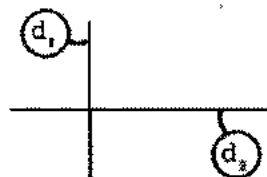
Mais comment ces deux droites seront-elles placées l'une par rapport à l'autre ?

Ainsi ?



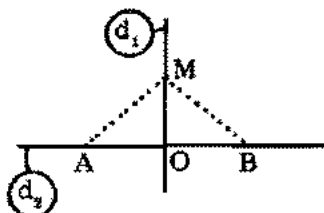
ou

Ainsi ?

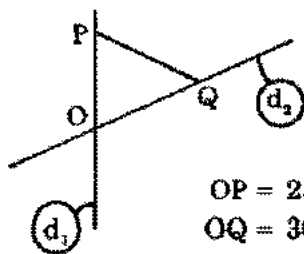
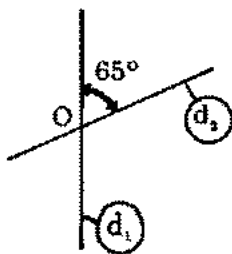


Peu importe, après tout, mais si la deuxième solution est choisie (et combien d'élèves choisiraient la première ?) la question se pose de trouver des critères caractérisant cette position :

- . équerre
- . égalité des distances MA et MB si les distances OA et OB sont égales
- . possibilité de retournement de la figure autour d'une des deux droites
- . existence d'un cercle de diamètre AM passant par O
- etc ...



Et si certains choisissent la première, un bon nombre d'entre eux prendra soin de préciser "l'écartement" des deux droites d'une manière ou d'une autre.



$$OP = 25 \text{ mm}$$

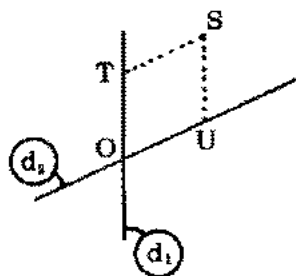
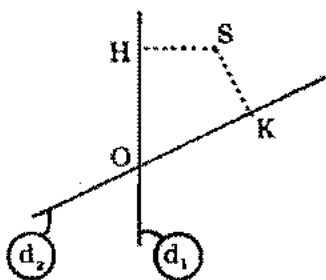
$$OQ = 30 \text{ mm}$$

$$PQ = 29 \text{ mm}$$

Une fois le repère défini, comment localiser un point de la figure ? Naturellement, par le couple :

(distance à d_1 ; distance à d_2)

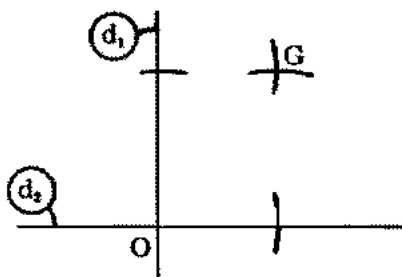
Une question se pose alors : comment doit-on prendre la distance d'un point à l'une des droites du repère ? la plus courte possible ? ou parallèlement à l'autre droite ?



C'est là qu'apparaît un avantage du repère orthogonal : faites la figure et vous verrez ! Si ce n'est déjà fait, c'est un tel repère que nous adopterons désormais.

Voici maintenant un couple : (3 cm ; 4 cm). Ce couple permet de repérer non pas un point, mais quatre points de la figure. On tourne cette difficulté en utilisant des nombres relatifs, comme il est bien connu (mais attention ! ces nombres ne peuvent plus être qualifiés de distances !).

Le marquage du point G repéré par le couple (+ 3, + 4) ne nécessite nullement le tracé de parallèles, comme le montre le dessin ci-dessous :



On a reproché à l'ancien enseignement de la géométrie de privilégier certaines figures (le triangle, entre autres) au détriment d'autres (le parallélogramme, par exemple). Mais n'est-on pas en

train, actuellement, de privilégier certaines notions (le parallélisme, surtout) au détriment d'autres notions (la *distance dans le plan*, entre autres).

Il y a pire ! On prétend *définir* une distance dans le plan à partir de la structure affine de celui-ci, c'est-à-dire fonder la notion de distance sur celle de parallélisme.

Or je mets au défi quiconque de faire comprendre à un élève de quatrième (ou de toute autre classe) ce que sont des droites parallèles sans lui en faire tracer. Et chacun sait bien qu'en l'occurrence la définition des parallèles et l'axiome d'Euclide sont d'un bien faible secours alors que la règle graduée et le compas sont très efficaces ...

Pour parler comme Papy, si chacun d'entre nous n'avait pas "la vision bien familière de la promenade du mètre étalon s'amusant à mesurer les distances", aurait-il jamais eu celle des parallèles ?

La géométrie, ce n'est pas une réalité affine sur laquelle on construit une métrique, pas plus qu'une réalité métrique qu'on munit d'une structure affine. Elle est à la fois métrique et affine et il faut la prendre comme elle est.

Certes, il est efficace de faire opérer, dans certaines situations géométriques, des structures mathématiques : la structure vectorielle \mathbb{R}^2 , par exemple. Comme cette structure est efficace, il sera bon d'en faire une théorie, au demeurant très simple puisque chaque démonstration se ramènera à un calcul (1) élémentaire.

Mais prenons-y bien garde : cette théorie ne sera nullement une théorie de la géométrie. Il ne faudra pas croire, en particulier, que c'est la *définition d'une norme sur \mathbb{R}^2* , à partir du produit scalaire qui fournira une *distance dans le plan* ; le double décimètre y a pourvu bien longtemps avant ! Qu'on ne prétende pas, à cette occasion "démontrer" les axiomes des distances, comme on le voit trop souvent ! Ce que l'on peut démontrer (mais l'élève est-il bien motivé pour ce genre de démonstration ?) c'est que le *modèle \mathbb{R}^2* (vectoriel normé) vérifie bien l'inégalité triangulaire donc qu'il est bien adéquat pour décrire la réalité géométrique. Il serait certainement beaucoup plus intéressant de donner des exemples d'"autres distances" (dont certaines, d'ailleurs, *ne peuvent pas être associées* à une norme) tirés de la réalité.

(1) En fait il n'est pas de démonstration qui ne se ramène à un calcul. Ce n'est pas par simple jeu de mots que la logique mathématique se compose des deux parties "Calcul des propositions" et "Calcul des prédicats".

Un reproche que l'on fait parfois à l'utilisation de R^2 est que certaines démarches ne sont pas intrinsèques. Mais si on ne donne à l'élève que des méthodes d'étude intrinsèques, comment saura-t-il qu'il en existe de non intrinsèques et, donc, comment saura-t-il ce qu'est une méthode intrinsèque ? Au contraire, si telle propriété se retrouve dans de nombreux cas, indépendamment du choix du repère, le sens du mot "intrinsèque" sera connu avant le mot lui-même. Voilà bien une circonstance où la mathématisation d'une situation peut apporter des connaissances sur cette situation et non pas seulement sur la théorie développée à l'occasion de l'étude de la situation : la mathématique peut faire progresser la connaissance sur autre chose qu'elle-même ; la mathématique, cela peut servir, cela peut avoir des applications ailleurs ; la mathématique, c'est utile ... même en géométrie (qu'il ne faut surtout pas confondre avec la mathématique !).

Lorsque certains professeurs de mathématique (dont j'étais et dont je suis toujours) ont décidé d'unir leurs efforts et de travailler *en équipe* pour essayer de changer quelque chose dans l'enseignement de la mathématique, ils s'étaient donnés pour but essentiel de *faire aimer la mathématique par les enfants*. Je ne crois pas qu'un professeur de mathématique puisse s'en donner d'autre.

La géométrie est, sans conteste, un champ d'exploration où nos élèves peuvent s'entraîner efficacement à la mathématisation, à la position et à la résolution des problèmes.

A condition, bien sûr, qu'au lieu de paralyser son initiative par des exigences contraignantes ("on ne peut pas parler d'une question sans en avoir fait les fondements" dit Braemer) qui l'obligent à enfoncer les portes ouvertes, le professeur sache lui fournir le langage et les outils qui lui permettront d'exercer efficacement cette initiative, donc de progresser.

MATHEMATICA et PAEDAGOGIA

A partir du N° 60, la revue est *scindée* en deux fascicules, l'un en français, l'autre en néerlandais.

Nos amis Français recevront d'office l'exemplaire francophone. Mais ils pourront, sans supplément de cotisation (pour cette année du moins), recevoir en surplus l'édition néerlandaise. Il leur suffira simplement d'en faire la demande si cela les intéresse.

Rappel : pour un supplément de 20 F, tout adhérent de l'A.P.M.E.P. reçoit cette revue.

ANNEXE

Rossi (Didier)

repère entièrement le dessin à l'intérieur d'un rectangle (3) de 13 cm de hauteur et 7,1 cm de largeur "Tu effaceras ce rectangle par la suite car c'est un point de repère *qui ne figure pas sur le dessin*".

Mazille (Pascale)

reproduit exactement le dessin de Rossi. Sa description laisse entrevoir Thalès : "Entre le bord en haut de la feuille et la ligne tracée il doit y avoir :

à gauche 3,9 cm
au milieu 4.1 cm
à droite 4,3 cm".

Maisonnas (Philippe)

"C'est un trapèze (2) : $(A \rightarrow B) = 4 \text{ cm}$ $4,9 \text{ cm} = (D \leftarrow A)$
 $(B \rightarrow C) = 4,5 \text{ cm}$ $(D \rightarrow C) = 7 \text{ cm}$ ". C'est un embryon de notation vectorielle, ou, du moins, le langage des applications (translations) même s'il est incomplet et mal utilisé. Il mesure le prolongement des côtés du quadrilatère proposé (1) "A \rightarrow B est prolongée vers A par un trait de 2,3 cm".

Couturier (Bruno)

pense à mesurer la diagonale AC *non tracée* (5).
Larquey reproduit exactement son dessin.

Nief (Jean-Paul)

"A est sur la même ligne que D" Cela montre que l'axiome "par deux points il passe une droite et une seule" n'est immédiat que si la droite est *matériellement* tracée.

Charreton (Evelyne)

questionne Nief sur "l'inclinaison de AB et de DC", et proteste énergiquement contre les affirmations (par ailleurs fausses) de ce dernier sur le parallélisme de AD et BC. Cela ne l'empêche pas de parler de "trapèze" dans sa description.

Gélu (Dominique)

"Aucun angle n'est droit". Voir le dialogue *Gélu Capriotti* (7).
Gélu a transmis une donnée superflue et il en résulte une discussion portant sur un millimètre ...

Caprioli (Véronique)

utilise les points cardinaux. C'est par ailleurs très confus : elle baptise "diagonale" toute droite non parallèle à un bord du papier. Le destinataire Treppoz n'y comprend rien : il invente, de plus, que les "diagonales" sont "verticales" !

Treppoz (Bruno)

utilise l'équerre. La reproduction de Palandri est acceptable.

Palandri (Thierry)

"Tracer une droite de 10 cm". Le repérage se fait à partir de la première droite tracée et d'une perpendiculaire à celle-ci (le mot "perpendiculaire" n'est pas utilisé : le tracé à l'équerre est indiqué). Confusion entre le point C et "la ligne C" qui est la droite matériellement tracée à partir de C.

Maury (Philippe)

abuse du parallélisme (6) (variation de 2 mm non détectée). Les dimensions données pour localiser A B C D le sont le long des traits déjà tracés (et ne peuvent donc servir à placer ceux-ci). Pour cet élève, il ne saurait y avoir de distance entre deux points non reliés par un trait. Cela est confirmé par la réponse "Question mal posée" au destinataire *Martelli* qui demande "A combien de cms le point A est-il de la gauche ou de la droite ?" *Martelli* pense évidemment à la distance de A au bord de la feuille de papier, au sens où on l'entend en géométrie ; mais la perpendiculaire de A au bord de la feuille n'est pas tracée, alors Maury ne comprend pas. La deuxième réponse confirme d'ailleurs ce point de vue. La dernière réponse est encore plus significative : "D'où part le trait de 11,3 cms ?" "Il s'agit d'un trait quelconque". Bien sûr ! c'est le premier élément de la description ! Comment le localiser, et par rapport à quoi ? *Martelli*, comme on s'en doute, n'a rien trouvé !

Martelli (Bruno)

utilise correctement le rapporteur. Le destinataire *Pignon* exécute un dessin exact.

Pignon (Didier)

utilise avec un complet succès la méthode de repérage par distance aux bords de la feuille. Le destinataire *Ricard* trouve facilement, sans question.

Devaux (Muriel)

utilise nord, sud, est, ouest. Note les traits d'abord A → B puis (A,B) : "L'autre trait D → C est plus près du sud ... (A,B) = 4 cm"

Gaudemer (Dominique)

pense à transmettre la longueur de la diagonale AC, mais précise : "AC = 5 mais ce n'est pas en ligne droite, c'est en ligne penchée vers le haut, puis vous l'effacerez, AC est pour vous repérer". Visiblement, deux points ne sont "en ligne droite" que si celle-ci est tracée matériellement ... Voir à ce sujet les remarques concernant Nief et Maury. A une question de *Courteix* (destinataire) il confirme : "AC est penché vers le haut" alors que AC est "horizontale" (mais *non tracée matériellement ...*)

Courteix (Danielle)

mesure le trait qui porte les points A et B mais non la distance AB. Cette dernière dimension ne peut être qu'incidemment déduite des mesures des "prolongements" des côtés AB et CD. Le destinataire *Berrat* ne trouve pas ...

Berrat (Pascal)

"La ligne A,D et la ligne D,C se croisent en formant un angle droit". Cet angle droit provoque sans doute un réflexe chez le destinataire *Laget* qui questionne : "quelle est la ligne horizontale ? la verticale ?" La réponse vaut son pesant de gratons ... La réaction (en rouge) de *Martine Laget* (qui n'a pas réussi son dessin, bien que les indications de *Berrat* soient suffisantes) est à lire ...

Du fait que "le sens de l'inclinaison n'est pas précisé", l'angle droit n'a plus aucune valeur, et les "lignes obliques ne peuvent pas être tracées".

Sornay (Catherine)

A lire : le dialogue de sourds avec *Martine Julliard* (7).

Prugnard (Myriam)

A lire ! (7) Malgré l'imprécision des informations, *Catherine Lambert* arrive à dessiner un calque remarquable. Noter l'utilisation du milieu des deux traits qui ne sont "pas parallèles de quelques millimètres".

Cataud (Frédérique)

Description confuse, faisant intervenir des éléments étrangers à la figure et qui déroutent *Courbière*, le destinataire. Le dialogue est à lire en entier. Noter que le sens géométrique du mot "intersection" est bien spécifique à cette branche de la mathématique (4) (7).

Courbière (Jean Guy)

"C'est un trapèze A, B, C, D

A B
D C"

Guerguieff (Brigitte)

questionne *Courbière* sur la longueur d'une diagonale.

Aucun n'a utilisé le compas pour reproduire le dessin sur calque.

Le compas est associé à l'idée de *cercle* ; or le dessin à reproduire ne contenait que des *droites*.

* Dessin n° 9 - CATAUD Frédérique - Description reçue par : COURBIERE.

- *D est le point d'une sorte de croix.*

Pour tracer cette croix fais d'abord un petit triangle

de 3,5 cm du côté gauche C

de 4 cm du côté droit A

de 4,5 cm de base, mais ne trace pas cette base.

(1) *Font de même* : Couturier, Treppoz, Maury, Palandri, Pignon, Martelli, Ricard, Courteix.

Cela montre la nécessité d'expliquer une convention de dessin concernant la représentation de la droite.

(2) Couturier, Larquey, Nief, Charreton utilisent aussi, et à tort, le mot "trapèze". Le mot "quadrilatère" n'est pas dans leur vocabulaire.

(3) Un même genre de repérage, par exemple par "horizontales" ou "verticales en pointillé à effacer ensuite", est trouvé chez Larquey, Gélis (distance aux bords), Treppoz, Palandri, Martelli, Pignon, Ricard, Laget, Lambert, Urbanowski.

D'une manière générale, les reproductions obtenues à partir de ces descriptions sont bonnes.

(4) Il serait bon de prévoir des exercices du type :

trouver : $a \cap b$, $c \cap d$, $g \cap g$



(5) Y pensent aussi : Guerguieff, Treppoz, Martelli, Devaux, Gaudemer, Sornay.

(6) Dans le même cas : Devaux.

(7) Dialogues : voir page 41.

Ensuite tu vas prolonger ce triangle en croix sur la même diagonale que C, tu vas tracer une ligne de 8 cm, 5.
De l'autre côté même procédé avec une ligne de 7 cm.

Ensuite, tu pars du point D et tu mesures
sur la ligne C 4 cm, 5
sur la ligne A 5 cm.

Pour rejoindre ces deux lignes tu tires un trait vertical partant de la ligne A vers le haut mesurant 4 cm, et tu relies le point de la ligne C au point B qui est l'arrivée de 4 cm partant de la ligne A.

COURBIERE

Questions

Est-ce un trapèze et pourquoi parles-tu de triangle ?

Sais-tu ce qu'est un trapèze ?

Où est D ?

Qu'entends-tu par intersection ?



CATAUD

Réponses

Ce n'est pas un trapèze. Je ne sais pas ce que c'est. Je parle de triangle car c'est pour t'aider.

Non.

D c'est le point d'intersection des deux lignes A et C.



voilà une intersection

* Dessin n° 21 - GÉLU - Description reçue par CAPRIOLI.

CAPRIOLI

Questions

5,5 cm en long ou large ?

Est-ce 6 cm correspondant à la distance entre B et C ?

Mesure à nouveau B.C, je trouve 6.1 cm et je ne me suis pas trompée dans les mesures.

Es-tu sûre que $AD = 5$ cm ?

Comment ?

GÉLU

Réponses

En hauteur.

Oui en prenant la feuille verticalement.

$BC = 6$ cm.

Oui.

Il faut joindre tous les points.

- * Dessin n° 28 - SORNAY - Description reçue par Martine JULLIAND.

JULLIAND

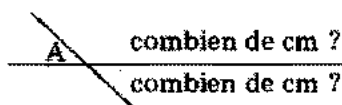
Questions

Qu'est-ce qu'un croisé ?

X chaque trait mesure-t-il 11,9 cm ?

Combien de cms séparent le premier trait du croisé ?

Combien de cms séparent le premier trait du croisé ?



Du trait de 7 cm au trait de 13,3 cm combien y a-t-il de cms de différence du sommet du trait de 7 cm et de celui de 13,3 cm ?

Combien y a-t-il de différence entre le sommet du trait de 6,3 cm et celui de 13,3 cm ?

SORNAY

Réponses

C'est deux traits qui croisent comme le signe X

Non, un trait mesure 13,3 cm et un autre 11,9 cm.

Ecris mieux, je comprends rien, merci.

Il n'y a pas de croisé, ces deux traits se croisent.

7 cm

6,3 cm

- * Dessin n° 29 - PRUGNARD - Description reçue par Catherine LAMBERT.

- Il y a 4 points : A, B, C, D.

- De B à C il y a un trait de 4,5 cm qui est un *petit peu penché* vers la droite.

- De B à A il y a un trait de 4 cm qui est *légèrement penché* en descendant vers la gauche.

- De A à D il y a un trait de 7 cm qui *n'est pas parallèle de quelques millimètres* au trait BC et qui est lui aussi un *peu penché*.

- De C à D il y a un trait de 5 cm qui est *assez penché*.

LAMBERT

Questions

De B à C, un trait de 4 ou 5 cm ? Et un trait penché un peu ?

De combien en dessous de la ligne droite de B à C ?

PRUGNARD

Réponses

De B à C un trait de 4,5 cm.
Un peu penché.

Si tu prends le milieu de BC et le milieu de AD et que tu rejoignes les deux points, tu trouves 4 cm et 3 millimètres.