

Formation des chercheurs de mathématiques

par *Gustave CHOQUET*

Je consacrerai mon exposé * à la mise au point des observations personnelles que j'ai faites sur la formation des chercheurs, à la fois dans mon enseignement, dans mon Séminaire, et dans l'équipe de recherche dont je m'occupe.

Ces observations ne visent nullement à constituer un corps de doctrine à valeur universelle ; je doute d'ailleurs qu'une telle doctrine puisse exister ; mais je crois par contre que la confrontation de nos expériences peut être fructueuse pour chacun de nous, et peut influencer utilement notre comportement futur auprès des étudiants et des jeunes chercheurs.

Ma première observation sera qu'il n'est pas possible de dissocier le problème de la formation des chercheurs de celui de la formation des étudiants et de celui de l'enseignement secondaire ou primaire. Bien que, fondamentalement, je croie à l'égalité des capacités intellectuelles de tous les individus normaux à leur naissance, il faut bien constater que les influences conjuguées du milieu familial, du milieu social et des enseignements aux niveaux primaire et secondaire aboutissent à la formation d'individus aux goûts, aux aptitudes et aux besoins extrêmement variés lorsqu'ils arrivent à l'Université. Le professeur d'Université se trouve donc devant un ensemble très hétérogène d'individus, malgré le pouvoir niveleur des éventuels examens de sélection. Il est ainsi hors de question d'envisager un mode de formation stéréotypé, indépendant de la personnalité de nos futurs étudiants : leurs échecs mesureraient seulement la distance entre nos méthodes et leurs personnalités. Par contre, il est important que le comportement du professeur soit dirigé par quelques principes, conscients ou non, implicites ou explicites.

Le premier de ces principes pourrait être qu'il y a *quelque chose à faire*, c'est-à-dire que de notre comportement dépend la qualité du futur chercheur, et la quantité des bons chercheurs que nous formerons. Certes, on entend parfois affirmer que seuls

* Cet exposé a été fait en juillet 1972 lors de la Conférence Internationale de Grèce, organisée par l'Union Balkanique des Mathématiciens et l'Union Pas-crétoise. Il remercie ses organisateurs d'en avoir permis la reproduction dans ce Bulletin.

comptent les meilleurs mathématiciens, ceux qui apporteront les idées nouvelles et résoudre les grands problèmes, et que pour ceux-là peu importe la méthode de formation puisque d'eux-mêmes ils sauront trouver la nourriture dont ils ont besoin. Je ne suis d'accord avec aucune de ces affirmations : on a besoin de mathématiciens de tous les niveaux et de toutes les spécialités ; d'autre part, faire des mathématiques est une activité sociale, et le plus créatif des mathématiciens ne créerait pas s'il n'avait le stimulant constitué par l'appréciation et la compréhension de ses pairs ; et enfin le futur grand mathématicien ne connaît pas toujours lui-même ses possibilités ; il ne les découvre parfois qu'assez tard, et il a besoin d'être soutenu et guidé dans ses premiers pas ; de plus il est clair que les mathématiques qu'il créera dépendront de sa formation initiale : sinon on ne s'expliquerait pas pourquoi des réservoirs immenses d'hommes tels que la Chine n'ont pas produit pendant plusieurs siècles de grands mathématiciens.

Nous adopterons donc cet axiome de base : "Il y a quelque chose à faire, et de la valeur de notre enseignement dépend l'éclosion et la maturation des talents mathématiques de nos étudiants".

La créativité et les programmes. J'ai déjà dit que, pour moi, le problème de la formation des chercheurs n'est pas essentiellement distinct de celui de la formation des étudiants, quels qu'ils soient, et à n'importe quel niveau. En fait, dans cette formation, le principe directeur doit être partout le même : *Le développement de la créativité.* S'il s'agit de Mathématiques, les principes annexes concerneront surtout l'enseignement des matières et les méthodes de recherche propres aux Mathématiques.

Le développement de la créativité est un objectif si fondamental qu'on pourrait s'attendre à le voir rappelé à chaque instant dans les instructions officielles concernant l'enseignement à tous les niveaux. Or, nous savons tous avec quelle facilité les planificateurs et chacun de nous donnent la prééminence au contenu des programmes. Peut-être parce que c'est l'étude des enfants retardés qui a conduit les pédagogues de génie tels que Madame Montessori à formuler nettement, après J.J. Rousseau, l'importance des méthodes actives, nous succombons indéfiniment au mirage des programmes soigneusement mis au point et nous pensons, surtout à l'Université, qu'un cours bien structuré sur un programme modernisé est le but final de notre pédagogie. Le professeur

prépare avec conscience un beau cours, rigoureux et limpide comme l'eau claire d'une source, et s'étonne, lors de l'examen, que cette eau pure se soit muée en un liquide trouble peu appétissant.

C'est donc que la beauté de la matière enseignée et la clarté de l'exposé ne sont pas suffisantes, et ne sont peut-être même pas absolument nécessaires.

L'enseignement secondaire qui, depuis une quinzaine d'années, est en train de subir, en mathématique, une grande mutation — et ceci dans tous les pays — risque de souffrir de ce mirage si l'on n'y prend pas garde. Les programmes n'y avaient pas sensiblement évolué depuis fort longtemps ; une mise au point s'imposait, à la fois élagage et introduction de quelques outils simples d'algèbre. Mathématiciens et professeurs du secondaire se sont donc mis au travail et ont fabriqué de beaux programmes ainsi que des recommandations sur la façon de s'en servir ; et une floraison généreuse de manuels est apparue.

Il est trop tôt pour juger des fruits de cette réforme ; après plusieurs années de rodage, ses excès les plus graves disparaîtront, il faut l'espérer, et on atteindra un régime de croisière. Il n'y a aucun doute que les jeunes qui sortiront des lycées dans les prochaines années auront reçu une formation fort différente de celle donnée voici vingt ans : elle sera à base d'algèbre et non plus de géométrie. Cette réforme peut donc orienter le développement des mathématiques dans un sens plus algébrique ; il n'est pas certain que ceci soit un mal ; toutefois, on doit bien constater que la plupart des Analystes actuels sont des visuels et qu'ils ont développé leur intuition au contact de la géométrie ; ceci est particulièrement vrai de l'Analyse fonctionnelle qui, par bien des aspects, apparaît comme un prolongement de la géométrie. Il est donc possible que ce qui constitue l'originalité profonde de l'Analyse souffre de la réforme, ce qui conduirait à un appauvrissement du champ des Mathématiques.

Mais aussi, on a trop souvent oublié, en élaborant les nouveaux programmes, l'importance des *problèmes* dans l'enseignement secondaire. L'algèbre enseignée à ce niveau est peu favorable à la fabrication de problèmes intéressants ; aussi, ne peut-on offrir aux élèves que des exercices qui sont des applications directes de théorèmes du cours. Les problèmes de géométrie développaient l'intuition, l'ingéniosité, la créativité des meilleurs élèves. Si les mathématiciens ne se hâtent pas de constituer un corps de véritables problèmes adaptés aux nouveaux programmes,

il est à craindre qu'une génération des meilleurs jeunes lycéens ne puisse pas développer au lycée son goût pour la découverte mathématique, et ceci de façon parfois irrémédiable.

Conscients de ces difficultés, certains professeurs organisent dans les lycées des clubs mathématiques, où les jeunes peuvent trouver un aliment plus excitant qu'un cours trop souvent réduit à l'étude de structures, importantes certes, mais par trop squelettiques.

Ceci m'amène à dire un mot de l'institution des Olympiades, particulièrement développées dans les pays de l'Est de l'Europe mais qui, sous des formes moins connues, existent cependant dans la plupart des pays (en France, le Concours général). Je pense que c'est une bonne institution parce qu'elle constitue pour les jeunes doués pour les mathématiques une approbation et un encouragement à leurs talents ; mais elle peut aussi avoir ses dangers, par exemple un "bachotage" consistant en une préparation spéciale en vue de ces Olympiades.

Un dernier mot concernant certains liens entre enseignement secondaire et recherche : certains ont pensé qu'il serait bon pour les élèves les plus doués d'être sélectionnés et mis dans des classes spéciales, en vue d'une préparation intensive à l'Université ; pour diverses raisons il ne semble pas que ces classes aient rencontré le succès escompté : le facteur temps est important, même pour un esprit doué, et le rythme en apparence trop lent d'une classe normale permet une assimilation meilleure des notions de base. Par contre, il est important que la nourriture intellectuelle donnée à une classe normale soit suffisante : un rabâchage indéfini sur les définitions des relations d'équivalence, des lois de groupe, d'anneau ou d'espace vectoriel, ne peut en aucun cas être considéré comme une nourriture intellectuelle, pour élèves doués ou non.

La parcellisation dans l'enseignement supérieur. L'enseignement mathématique à l'Université a subi, avec un peu d'avance, une transformation analogue à celle des lycées : les programmes ont été radicalement transformés ; on est passé de Goursat à Bourbaki ! Cette transformation s'est accompagnée, de façon assez générale, d'une parcellisation poussée des enseignements : celui-ci est divisé en unités correspondant plus ou moins aux grandes structures au sens de Bourbaki : algèbre générale, algèbre linéaire, topologie générale, intégration, variétés différentielles,

etc ... Le professeur chargé d'un de ces enseignements en est en général un spécialiste ; il en connaît fort bien l'ossature, les notions essentielles qui sont pour lui des notions naturelles et comme allant de soi ; il axe donc son cours sur leur introduction et leur développement logique ; et souvent il ne peut pas en donner d'applications substantielles, soit par manque de temps, soit parce que ces applications le feraient sortir de la structure étudiée.

L'expérience montre que cette parcellisation a plusieurs défauts fort graves : elle a augmenté considérablement le nombre des notions de base enseignées, au détriment d'une réflexion approfondie et personnelle, basée par exemple sur des problèmes riches et excitants. En même temps elle a contribué à l'augmentation du niveau du cours, en partie parce que le cours est fait par un spécialiste, en partie aussi parce que l'axiomatisation poussée des théories et la limpidité logique de leurs fondements est actuellement telle qu'on peut avoir l'illusion d'en faire un exposé convenable en un temps fort bref, d'où la tentation d'utiliser le temps ainsi épargné à de belles et vastes généralisations, jouissance suprême pour les initiés.

Elle ne présente aux étudiants qu'une vue locale des mathématiques ; aussi comprennent-ils mal la motivation des notions introduites, même si le professeur prend soin d'en faire un bref historique ; et au bout de deux ou trois ans de tels enseignements, ils voient les mathématiques comme une juxtaposition de théories brillantes, mais tombées du ciel, dont les démonstrations sont en apparence faciles, mais qui de façon curieuse deviennent difficiles à appliquer dès qu'on sort des chemins battus.

Enfin, cette parcellisation rend difficile le phénomène d'imprégnation des étudiants par le professeur. Il est important qu'un étudiant découvre un vaste champ des mathématiques avec un même maître ; il peut ainsi s'habituer à sa façon de penser, modeler son esprit sur le sien. Jadis, voici vingt ans au moins, l'enseignement de "Calcul différentiel et intégral, et applications à la géométrie" était fait par un ou au plus deux professeurs ; il serait souhaitable qu'on revienne à une formule de ce type ; l'imprégnation redeviendrait alors possible, le niveau théorique du cours diminuerait, et le cours s'étofferait d'applications, de motivations ; il s'humaniserait.

Participation active des étudiants. J'ai souligné déjà que la limpidité et la rigueur d'un cours n'étaient pas suffisantes pour qu'il soit

bien assimilé. L'important n'est pas la somme de travail et d'ingéniosité fournie par le professeur, mais celle fournie par l'étudiant. Autrement dit, l'essentiel n'est pas le cours, mais le travail personnel de l'étudiant. Il faut donc que, d'une façon ou d'une autre, le professeur provoque cet effort personnel ; il n'y a pas pour cela de recette universelle ; un même professeur peut y parvenir une année, échouer une autre année ; mais il doit en tout cas essayer de mettre le plus d'atouts possibles de son côté, et pour cela ne pas oublier certaines règles :

D'abord, s'il fait un cours pour la première fois, y prend plaisir, et donne à ses étudiants l'impression qu'ils participent à une expérience, c'est là un excellent atout. Il peut l'améliorer encore en constituant un groupe d'étudiants chargé de rédiger son cours, un autre chargé de constituer un recueil d'exercices (le succès d'une telle expérience peut se comparer à la réactivité chimique de l'hydrogène naissant ; et inversement on peut dire qu'un cours trop bien rodé s'érode).

Il serait donc souhaitable que, chaque année, chaque cours soit une nouvelle expérience.

Il est bon, certes, que le professeur ait un nombre suffisant d'assistants pour que les travaux pratiques se fassent par petits groupes ; mais ici encore, cette condition n'entraîne pas automatiquement le succès ; il faut aussi qu'un climat de confiance s'établisse entre assistant et étudiants, professeur et étudiants, de façon que ceux-ci osent poser des questions et formuler leurs difficultés. Certaines séances peuvent être réservées aux questions posées par l'auditoire ; certaines séances peuvent également être consacrées à des exposés d'étudiants, soigneusement préparés à l'avance, sur des applications du cours ou des présentations différentes de certains points du cours. Cette expérience est en général extrêmement décevante au début, ce qui montre d'ailleurs à quel point elle est nécessaire, et à quel point il est indispensable que les étudiants apprennent à préciser et à exprimer leur pensée, car ils ne sont traditionnellement entraînés qu'à écouter passivement.

Dans mon enseignement de troisième cycle, j'ai souvent demandé à mes étudiants de traiter à ma place certaines parties du cours (je leur fournissais, bien sûr, deux ou trois semaines à l'avance, toute la documentation nécessaire). Cette procédure, contrairement aux apparences, n'est pas de tout repos pour le professeur, car elle est éprouvante pour les nerfs. Mais elle est excellente pour les orateurs, car pour faire un seul exposé,

l'étudiant est obligé de bien assimiler d'abord de nombreux cours précédents, surtout lorsqu'il sait qu'on lui posera des questions lors de son exposé. Toutes les fois que j'ai utilisé cette méthode, les résultats ont été excellents, et en particulier une bonne proportion d'étudiants a manifesté en fin d'année son désir de faire de la recherche.

Il va sans dire que si l'on demande aux étudiants un travail personnel en profondeur, il faut qu'ils en aient le temps ; c'est pourquoi je ne crois pas souhaitable de leur imposer un horaire de cours trop lourd. Un horaire assez léger pour les étudiants soulage d'ailleurs en même temps les professeurs, et leur permet de faire de la meilleure recherche.

Ce que je viens de dire de l'enseignement à l'Université s'applique à tous les étudiants. Toutefois, le moment est peut-être venu de dire que beaucoup de déceptions seraient évitées aux étudiants et à leurs professeurs si les auditoires étaient plus homogènes et si on offrait aux étudiants les cours qui leur conviennent. Traditionnellement, voici vingt ans, les étudiants, surtout en Mathématiques, se composaient essentiellement de futurs chercheurs et de futurs professeurs de l'enseignement secondaire. Le nombre des étudiants a maintenant considérablement augmenté ; cependant, la plupart du temps, on leur fait à tous des cours de haut niveau théorique, et destinés dans notre esprit à la formation de mathématiciens professionnels. Or, la masse de nos étudiants n'a, ni les aptitudes, ni la motivation nécessaires pour assimiler cet enseignement. Il est donc urgent, du moins en France et probablement aussi dans d'autres pays, de créer à l'Université des enseignements plus variés, adaptés aux métiers que la société peut offrir aux étudiants à la sortie de l'Université.

L'enseignement au niveau "Recherche". Il est temps que j'aborde maintenant l'enseignement des mathématiques au niveau recherche, et l'initiation à la recherche, ce que nous appelons en France le 3ème cycle (ce 3ème cycle comporte à la fois des enseignements spécialisés et la rédaction d'un premier travail personnel).

Le sujet est vaste et passionnant et je ne pourrai en aborder ici que quelques aspects.

L'étudiant de 3ème cycle doit prendre conscience, si ce n'est pas déjà fait, de la différence fondamentale entre ce qu'il a fait jusque là, l'assimilation de mathématiques déjà faites, et ce qu'on attend de lui dans les années qui vont suivre, c'est-à-dire la cons-

truction de nouvelles mathématiques ; et dans ce nouveau domaine, il doit comprendre qu'il y a même deux niveaux : la résolution de problèmes déjà posés, dans un cadre connu, et la création de nouveaux concepts et de nouveaux problèmes.

Il doit comprendre que certains concepts qui nous semblent maintenant fort simples, tels que la notion d'espace vectoriel ou d'espace topologique, sont l'aboutissement d'un long effort poursuivi à travers plusieurs siècles ; que certains théorèmes — clefs comme le théorème de Hahn-Banach n'ont pas existé de toute éternité, et que leur découverte est, dans la pensée mathématique, l'équivalent en biologie d'une mutation.

Qu'il ne s'étonne donc pas qu'il soit difficile de créer du neuf, et surtout du neuf qui soit utile. Notre enseignement doit le rendre à la fois modeste et hardi devant les nouveaux domaines à explorer ou à créer : modeste parce que le fait d'assimiler facilement une théorie n'implique nullement qu'on aurait pu la créer ; et hardi parce qu'on ne peut rien découvrir sans hardiesse de pensée.

Ses premiers efforts pour découvrir du neuf seront probablement décevants, et ceci n'est pas mauvais, parce que générateur de modestie. Mais il ne deviendra hardi qu'après avoir éprouvé pour la première fois le choc et la joie de la découverte ; ce premier pas est important et pour qu'il soit possible, il est bon qu'il ne soit pas trop difficile : c'est peut-être là que le directeur de recherche peut être le plus utile en suggérant au début un problème ou une direction de recherche aux difficultés raisonnables, aux prolongements probables, et bien adapté aux forces du jeune chercheur.

Ce sont des considérations de ce type qui ont conduit en France à la création de la thèse de 3ème cycle et à un assouplissement de la thèse d'Etat.

Il y a dix ans encore, la seule thèse existante était la thèse d'Etat ; elle consacrait un long travail de plusieurs années, et progressivement son niveau avait monté. Après un long travail de gestation, émaillé seulement de quelques Notes aux Comptes Rendus de l'Académie, la thèse était publiée, en une unique publication. Elle constituait donc un monument dont la perspective effarouchait bon nombre de jeunes chercheurs.

Cette thèse d'Etat est maintenant assouplie ; elle peut être constituée de plusieurs publications s'échelonnant sur plusieurs années, et dont certaines peuvent avoir été écrites en collaboration.

En outre, le 3ème cycle dont j'ai commencé à parler vient de façon heureuse compléter l'initiation à la recherche ; sa première année comporte plusieurs enseignements spécialisés et un compte rendu écrit, soit de l'étude d'un Mémoire, soit de quelques aspects du cours d'un professeur, soit d'un groupe de travail ou d'un Séminaire. L'année suivante (parfois prolongée par une année supplémentaire) est consacrée au premier travail de recherche, appelé thèse de 3ème cycle ; les meilleures de ces thèses constituent de véritables travaux originaux donnant lieu à publication ; d'autres constituent une sorte de monographie personnelle, qui assure que son auteur a assimilé profondément une théorie, et en a repensé certains aspects sous une forme originale.

Je pense que ce système est bon et contribue à entourer la formation des jeunes chercheurs d'un climat de confiance. Il est à peine besoin de dire que, plus encore que dans l'enseignement du 2ème cycle, l'enseignement spécialisé de 3ème cycle doit avoir une pédagogie à base de recherche, les notions y seront introduites dans leur contexte historique, heuristique ; et en repensant devant ses étudiants la genèse des notions et des démonstrations, le professeur fera comprendre le travail immense qui a précédé le choix des bonnes définitions, l'énoncé des bons théorèmes.

Le rôle d'une équipe de recherche. Je crois fort important que le jeune chercheur soit intégré dès le début à une équipe de recherche, et participe activement à un Séminaire ou à un groupe de travail spécialisé.

Certes, quelques jeunes très doués parviennent, bien qu'ayant fort peu de contacts avec d'autres chercheurs, à commencer des recherches originales et même à achever une thèse intéressante. Mais ils sont une infime exception, et j'ai eu trop souvent l'occasion de recevoir un travail d'un jeune, isolé pour des raisons géographiques ou psychologiques, et de constater que ce travail, fruit de quelques années de recherche, tout en contenant parfois une idée intéressante, ou bien ne s'est pas développé dans la bonne direction, ou bien est resté à un niveau trop élémentaire, ou même ignore des travaux similaires antérieurs. Ces jeunes autodidactes, partis dans la recherche avec leur seul bagage de connaissances de niveau "licence", et coupés de la recherche vivante, ont souvent acquis des habitudes de pensée néfastes et sont devenus mathématiquement des asociaux, qu'il est difficile, et parfois impossible, de faire rentrer dans le grand courant de la recherche.

Le Séminaire pour les jeunes (je préfère dire Séminaire d'Initiation) remplit plusieurs rôles :

1) C'est le cadre social dans lequel des jeunes de la même génération se rencontrent, échangent leurs idées, se critiquent mutuellement ; ils y rencontrent aussi des mathématiciens plus chevronnés, et les échanges se font alors dans les deux sens, profitables aux deux générations.

2) Puis c'est là que le jeune va faire ses premiers exposés oraux, consistant par exemple dans la présentation d'un mémoire nouvellement paru, ou au contraire extrait d'un Journal d'âge vénérable, ou dans la synthèse de plusieurs tels mémoires.

Cet exposé sera critiqué par les auditeurs ; il sera ensuite rédigé avec soin, et après plusieurs rédactions successives, lues et relues par le directeur du jeune chercheur, il sera dactylographié et multigraphié pour une diffusion limitée. Je crois fort utile que le débutant sache que sa rédaction sera diffusée, lue, et deviendra un outil de travail.

Les premières rédactions sont presque toujours maladroites, pleines d'erreurs de toutes sortes, mathématiques et linguistiques ; le débutant ne sait pas qu'il faut une introduction, un bon choix de notations, un bon numérotage des définitions et théorèmes. Si ses défauts ne sont pas corrigés dès le début, ils risquent de l'accompagner toute sa vie durant.

Donc les exposés, oraux puis écrits, apprennent au chercheur à s'exprimer. Ils contribuent aussi à la formation des auditeurs, du moins si le thème du Séminaire n'est pas trop spécialisé, et je ne crois pas désirable qu'il le soit. Ils constituent donc un procédé de formation continue, et permettent d'éviter cet écueil, de jeunes chercheurs sur-spécialisés, qui finissent par produire une thèse d'une certaine valeur, mais n'ont qu'une culture générale rudimentaire. S'ils n'ont pas pris, jeunes, l'habitude d'élargir leur culture, ils risquent de ne le faire jamais et de demeurer, une fois devenus professeurs, des spécialistes auxquels on n'ose confier aucun enseignement en dehors de leur spécialité.

3) C'est au Séminaire que le jeune chercheur exposera ses travaux. L'exposé oral clarifiera sa pensée ; il profitera des critiques de ses camarades, de leurs suggestions aussi (c'est un fait d'expérience qu'il y a une corrélation étroite entre la valeur d'un jeune chercheur et sa faculté d'utiliser critiques et suggestions). Il peut arriver aussi, si ses contacts avec son directeur de recherche et avec

la littérature mathématique n'ont pas été suffisants, que ce soit lors de l'exposé oral de ses travaux qu'il apprenne qu'il a été devancé sur certains points.

4) Enfin, c'est au Séminaire que sont posés des problèmes ; certains reçoivent une solution presque immédiate, ce qui peut faire redémarrer une recherche qui était bloquée ; d'autres, plus difficiles et plus fondamentaux, constituent un aiguillon à la recherche ; ils favorisent la discussion et la recherche en équipe.

Du choix d'une direction de recherche. Autant je pense utile que le directeur de recherche fournisse au chercheur débutant un sujet assez nettement formulé, d'allure excitante, et susceptible de fructifier moyennant un travail honnête, autant je crois qu'à partir d'un certain niveau c'est le chercheur lui-même qui doit trouver sa voie. Chacun de nous connaît des exemples de chercheurs qui, sous la houlette d'un directeur de recherche dévoué, ont fait une thèse honorable mais qui, dès qu'ils se sont éloignés de leur père spirituel, ont été incapables de faire oeuvre personnelle, et bien souvent ont abandonné toute recherche. On retrouve ici la même situation que dans tout apprentissage : les débuts doivent être encouragés, soutenus, mais progressivement le maître doit retirer son soutien, et l'apprenti doit marcher seul.

Pour d'autres raisons aussi, le chercheur doit trouver seul sa voie : il m'est arrivé souvent de céder aux requêtes de jeunes chercheurs qui me demandaient une direction de recherche, et de constater peu de temps après qu'ils s'étaient vite éloignés de la direction suggérée alors que, dans bien des cas, l'avenir a montré qu'il s'agissait d'une excellente direction. Cet insuccès est bien naturel ; c'est le contraire qui serait étonnant ; l'accrochage suppose en effet que le jeune chercheur ait une intuition, une culture et des goûts assez voisins des miens pour que le problème qui excite mon intérêt excite aussi le sien.

Ce qu'on peut attendre de mieux, en moyenne, est que le chercheur intelligent s'intéresse au moins à un aspect du problème proposé, et le transforme en un problème nouveau qui devienne son problème. Le but est là : faire en sorte que le jeune chercheur ait dès que possible son problème. Assez souvent, à l'occasion d'un des exposés qu'il est chargé de faire au Séminaire, s'il a une culture suffisante pour reformuler personnellement son contenu, l'accrochage se fait, la pompe est amorcée, et le jeune chercheur commence véritablement à se poser des questions et à trouver du

nouveau. L'expérience m'a montré qu'effectivement les meilleurs chercheurs trouvaient leur voie à l'occasion de l'étude d'un bon mémoire, par exemple à l'occasion d'un exposé. Il faut souligner ici l'importance d'une compréhension approfondie d'une notion, d'un domaine, pour y créer du neuf : le chercheur qui, dans l'étude d'une notion nouvelle ne se contente pas de lire et comprendre la littérature correspondante, mais la cerne de plus en plus près par la fabrication d'une riche collection d'exemples et contre-exemples, finit par en avoir une intuition stupéfiante qui lui permet de répondre sur le champ à des questions d'apparence difficile : l'explication en est que sa connaissance des êtres est devenue telle qu'il les voit agir comme un romancier voit agir les personnages fictifs de son roman ; il sait prévoir leurs réactions, leur comportement dans des circonstances nouvelles. Arrivé à ce niveau élevé d'intuition, il est prêt à découvrir, à "voir" des relations jusque-là non aperçues par les autres ; il est donc mûr pour une découverte importante.

Importance des contacts variés et non-formels. Chaque département de mathématiques, chaque équipe de recherches, devrait disposer d'une petite salle de thé, tranquille et munie de tableaux noirs ; et, une fois par jour au moins, chercheurs débutants ou chevronnés devraient s'y rencontrer et bavarder de choses et d'autres.

C'est dans ces conversations non formelles que les jeunes comprennent vraiment comment se font les mathématiques, et comprennent que la vérité ne sort pas toute armée des cerveaux, mais suit des voies tortueuses et parsemées d'erreurs. Ils apprendront aussi comment on travaille, comment on se documente, on lit un mémoire, on extrait en quelques minutes d'un volumineux travail l'information dont on a besoin.

Sans vouloir établir de règle générale, je ne pense pas que le jeune chercheur ait intérêt à fréquenter trop de séminaires ni à suivre trop de cours : à partir d'un certain point, sa culture doit se constituer, par un phénomène d'agglutination, à partir de ses propres problèmes. Mais par contre il est souhaitable qu'il ne tarde pas trop à avoir des contacts avec des mathématiciens de la même spécialité n'appartenant pas à son équipe. Il est donc bon que le jeune chercheur participe au moins une fois par an à un Colloque spécialisé ; pour la même raison, je crois fructueux les séjours dans une équipe, pendant quelques semaines, de spécialistes étrangers.

De façon générale, les échanges, les changements de cadre, mais à dose modérée, sont bons ; on pourrait ici proposer comme garde-fous deux maximes opposées : "Les voyages forment la jeunesse" et "Pierre qui roule n'amasse pas mousse".

Ce qu'est la bonne recherche ; ce que sont les bonnes mathématiques. Autant il serait néfaste d'imposer au jeune chercheur une philosophie rigide de la recherche, autant je crois fructueuses les discussions à ce sujet ; elles sont utiles à tous, mais particulièrement aux débutants. J'ai connu un mathématicien qui était parti dans la recherche avec une noble ambition : découvrir une grande théorie, et il considérait comme indignes de son attention les problèmes particuliers dont s'occupaient ses camarades moins ambitieux. Inutile de dire que les grandes théories ne courent pas les chemins et que, surtout, elles ne sont que l'aboutissement d'un long effort patient et modeste ; ainsi son ambition avait toutes chances d'être vouée à l'échec, ce qu'elle fut. Or, pareil échec aurait peut-être été évité par des contacts et des discussions à coeur ouvert avec des mathématiciens expérimentés.

La variété des styles de recherche mathématiques est grande, mais deux d'entre eux semblent tout particulièrement s'opposer ; et ils se sont en fait opposés depuis la naissance des théories axiomatiques : il s'agit des mathématiques "dures" et des mathématiques "molles".

Le mathématicien "dur" collectionne les problèmes précis, choisis de préférence dans l'Analyse classique, et a une méfiance instinctive des généralisations. Le mathématicien "mou" déteste l'étude de problèmes précis et se complaît dans la fabrication de structures de plus en plus vastes. Chacun de nous connaît des représentants de ces deux tendances ; toutes deux sont respectables, bien que pendant longtemps on eût tendance à penser que les mathématiques molles constituaient une prolifération inutile et même néfaste. Actuellement, chacune de ces tendances est représentée par des mathématiciens de premier ordre. Toutefois, je ne peux m'empêcher de penser que dans le cas d'un mathématicien de moindre envergure, il est préférable qu'il s'occupe d'un problème précis ; du moins, s'il ne le résoud pas, il ne publiera rien, tandis qu'une fabrique de grandes structures peut tourner indéfiniment et encombrer de prose creuse les périodiques mathématiques.

A vrai dire, ma philosophie personnelle ne penche ni d'un côté, ni de l'autre, mais en constitue plutôt une synthèse. Je

trouve dommage que le mathématicien dur rate parfois une occasion de fabriquer un bel outil mathématique, faute d'avoir placé son problème particulier dans un cadre plus général où la spécificité du problème serait mieux apparue.

Les mathématiques ont atteint un degré de développement tel que le nombre de nouveaux problèmes, précis, excitants, d'énoncé simple, croît beaucoup plus vite que le nombre des problèmes que l'on peut résoudre. Il est donc difficile de soutenir que l'objectif essentiel du mathématicien doit être la résolution de problèmes. Je pense que les problèmes sont essentiellement un moyen : à la fois un garde-fou contre les théories creuses, et un point d'accrochage et de départ pour une bonne recherche ; le but final restant la création d'outils puissants qui conduisent à une simplification et à une unification des mathématiques.

Formation de l'éthique du jeune mathématicien. J'effleurerais seulement cette importante question, tout en constatant l'importance de l'appartenance à une équipe pour l'élaboration d'une telle éthique. Citons seulement quelques aspects de l'éthique du chercheur : honnêteté intellectuelle ; désintéressement ; publication seulement de travaux mûris dont on est entièrement satisfait ; indication des sources, même lointaines, dans la moindre publication ; éloignement des intrigues de carrières ; efforts constants pour sortir du cadre étroit de sa spécialité, contacts avec des chercheurs de spécialités variées ; information sur les problèmes humains liés à l'enseignement et à la recherche.

Conclusion. J'ai cherché, dans cet exposé, à dégager les facteurs favorables à la formation d'un chercheur de mathématiques. Il va sans dire que la meilleure recette échouerait si la matière humaine de départ n'avait pas certaines qualités, dont il est temps de dire quelques mots :

Mémoire, imagination, poésie et fantaisie, hardiesse, un certain goût de la contestation des idées reçues, et un don pour l'association des idées ; par contre, je classerai comme inutile et parfois nuisible le brillant (particulièrement néfaste chez le professeur).

Mais j'ai gardé pour la fin les qualités de base, absolument indispensables : l'amour des mathématiques, une grande obstination, et un grand pouvoir de concentration ; on peut rappeler ici la réponse de Newton auquel on demandait comment il avait découvert son système du monde : *"En y pensant tout le temps"*.