Ecriture de proposition en mathématiques

par Marc LAURA,
Professeur au lycée Le Corbusier (Poissy)

Parmi les écritures :

$$x + y \ , \ x \subset y \ , \ (x = y) \text{ et } (y = z), \ (x \cap y) \cup (x \cap z)$$

certains élèves ont des difficultés à distinguer celles qui représentent un groupement de mots ne contenant pas de verbe, de celles qui représentent une proposition (groupement de mots contenant un ou plusieurs verbes).

Le but de l'étude qui suit est de caractériser l'écriture de certaines propositions.

On sait que, mis à part des écritures comme

$$a_n, \complement_E A, \mathrm{id}_E, E^*, E^+, E^-, E^2, f^{-1}, a^n, \frac{a}{b}, \dot{a}, \overline{AB}, \overrightarrow{AB}, \widehat{AB}, \widehat{ABC},$$

en mathématiques, l'écriture se fait horizontalement de la gauche vers la droite, et se présente sous la forme d'une succession de lettres et de signes, succession appelée assemblage par N. Bourbaki.

Nous retiendrons pour notre étude des signes encadrés par une lettre ou un assemblage à leur gauche et par une lettre ou un assemblage à leur droite. En particulier, nous retiendrons des signes concernant des opérations internes dans un ensemble, des signes concernant des relations dans un ensemble, des signes de logique.

TABLEAU DE SIGNES OPERATOIRES

Signe	$\cap$	$\cup$	Δ	$\times$	$\circ$
lecture	inter	union	delta	croix	rond

Signe	$+$	$-$	$.$	$:$
lecture	plus	moins	point	deux points

TABLEAU DE SIGNES RELATIONNELS

Signe	$=$	$\neq$	$\subset$	$\not\subset$	$\mid$	$<$
lecture	est égal à	est différent de	est inclus dans	n'est pas inclus dans	divise	est inférieur à

Signe	$>$	$\leqslant$	$\geqslant$	$\sim$	$/\!/$	$\perp$
lecture	est supérieur à	est inférieur ou égal à	est supérieur ou égal à	est équivalent à	est parallèle à	est orthogonal à

TABLEAU DE SIGNES LOGIQUES

Signe	$\wedge$	et	$\vee$	ou	W	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\vdash$	$\vdash\dashv$
lecture	et		ou inclusif		ou exclusif	implication	équivalence logique	a pour conséquence	est équivalent logiquement à

On sait que si $*$ est un signe opératoire concernant une opération interne dans un ensemble E, si x désigne un élément de E, si y désigne un élément de E, l'écriture $x * y$ représente un élément de E appelé : composé de x et de y par l'opération.

On sait que si R est un signe relationnel concernant une relation dans un ensemble F, si a désigne un élément de F, si b désigne un élément de F, l'écriture a R b représente une proposition qui signifie : a est lié à b par la relation.

On sait que si $\mathfrak{L}$ est un signe logique, si p désigne une proposition, si q désigne une proposition, l'écriture p $\mathfrak{L}$ q représente une proposition.

Les remarques précédentes nous montrent qu'à partir d'éléments d'un ensemble, composés ou non par une opération interne, on peut obtenir des propositions engendrées par des relations, et que ces propositions, elles-mêmes, liées ou composées entre elles, donnent naissance à d'autres propositions.

On arrivera à cette constatation qu'il existe deux sortes de propositions :

— la proposition simple dont l'écriture ne contient pas de signe logique,

— la proposition composée dont l'écriture contient au moins un signe logique.

Ecriture d'une proposition simple

Si l'écriture d'une proposition ne contient pas de signe logique, cette écriture est de la forme

$$a \ R \ b$$

où R est un signe relationnel,
où a représente un élément d'un ensemble E,
où b représente aussi un élément de E.

On reconnaîtra la forme a R b dans chacune des écritures suivantes :

$$a = b \quad , \quad a \neq b \quad , \quad a \subset b \quad , \quad a \not\subset b \quad , \quad a \mid b \quad , \quad a < b$$

$$a > b \quad , \quad a \leqslant b \quad , \quad a \geqslant b \quad , \quad a \sim b \quad , \quad a /\!/ b \quad , \quad a \perp b$$

Ecriture d'une proposition composée contenant un seul signe logique

Si l'écriture d'une proposition contient un seul signe logique $\mathfrak{L}$, cette écriture est de la forme

$$p \ \mathfrak{L} \ q$$

où p représente une proposition simple,
où q représente aussi une proposition simple.

On reconnaîtra la forme $p \mathcal{L} q$ dans chacune des écritures suivantes :

$$p \text{ et } q \ , \ p \text{ ou } q \ , \ p \Rightarrow q \ , \ p \Leftrightarrow q \ , \ p \vdash q \ , \ p \vdash\!\dashv q$$

Abus d'écriture

Soit l'assemblage

$$x \; R \; y \; R' \; z$$

où R et R' sont des signes relationnels,
où x, y, z sont des éléments d'un ensemble.

Cet assemblage est un abus d'écriture car il ne contient pas de signe logique et n'est pas la représentation d'une proposition simple.

$x \, R \, y \, R' \, z$ est mis à la place de

$$(x \; R \; y) \quad \text{et} \quad (y \; R' \; z)$$

qui est de la forme $p \mathcal{L} q$ définie précédemment.

On reconnaîtra l'abus d'écriture $x \, R \, y \, R' \, z$, dans chacun des assemblages suivants :

$$x = y = z \ , \ x \subset y \subset z \ , \ x \sim y \sim z \ ,$$
$$x \mid y \mid z \ , \ x < y < z \ , \ x \leqslant y \leqslant z \ ,$$
$$x \leqslant y < z \ , \ x < y \leqslant z \ , \ x \nparallel y \nparallel z \ .$$

La connaissance des formes caractéristiques d'écriture examinées, si elle nous permet de déceler des abus d'écriture, nous permet aussi de conclure que :

$$x \subset y \ , \ (x = y) \ \text{ et } \ (y = z)$$

sont des écritures de propositions
et que :

$$x + y \ , \ (x \cap y) \ \cup \ (x \cap z)$$

ne sont pas des écritures de propositions.

Plus généralement, nous pourrons discerner parmi les assemblages contenant moins de deux signes logiques, ceux qui représentent des propositions et ceux qui n'en représentent pas.

Mais dans l'enseignement du premier cycle, tous les assemblages ne sont pas aussi simples ; on trouve des écritures comme :

$$\big((x < y) \text{ et } (y < z)\big) \Rightarrow (x < z)$$
$$(xy = 0) \Rightarrow \big((x = 0) \text{ ou } (y = 0)\big)$$

Il serait donc bon de faire découvrir aux élèves les formes d'assemblages contenant deux ou trois signes logiques.

La découverte et l'observation des règles d'une syntaxe inciteront nos élèves à s'exprimer correctement.