Analyse probabiliste des tests d'aptitude dits : Q. C. M.

par Bernard SORIN (Université de Tours)

Il est dans le grand ordre qu'il y ait quelque petit désordre.

LEIBNIZ
(Essais de Théodicée III 243)

Le jugement des connaissances de candidats à un examen, à un emploi, est un problème délicat et toujours sujet à contestations passionnées, car des intérêts précis sont en jeu. Parmi les méthodes proposées, pour des raisons essentiellement de simplicité de dépouillement, on voit se répandre depuis quelques temps le système de contrôle par "*questions à choix multiples*", appelé plus brièvement : test Q.C.M. : un certain nombre de questions sont présentées au candidat ; pour chacune de celles-ci on propose un nombre fixe de réponses dont la réponse correcte ; le candidat coche, pour chaque question, ce qui lui semble la bonne réponse. On s'efforce, bien entendu, de rédiger des questions très précises, à réponse unique et non ambiguë. Ces tests Q.C.M. ne sont pas à exclusivité scientifique *.

Nous n'avons l'intention ici de faire ni réquisitoire ni plaidoyer à leur sujet. Notre point de vue est le suivant : *étant donné que cette technique de contrôle est utilisée, nous voulons préciser dans quelle mesure "le hasard intervient", c'est-à-dire dans quelle mesure la présentation de la réponse correcte parmi d'autres augmente les chances de réussite d'un candidat.* Dans ce contexte, *nous précisons également quelques problèmes de décision et d'estimation.*

* Par exemple, dans un test de connaissance pratique de l'Anglais parlé, une phrase est énoncée, l'auditeur doit cocher l'un des 3 dessins où un petit personnage est respectivement "*singing*", "*thinking*", "*sinking*".

I — Du modèle probabiliste

Soit un test Q.C.M. comportant *n questions à m réponses* proposées pour chaque question. Nous faisons les hypothèses suivantes quant à la conception du test et au comportement du candidat :

H_1 Etant donné une question posée, le candidat connaît ou ne connaît pas la réponse à celle-ci ; s'il la connaît, il répond corectement, s'il ne la connaît pas il choisit "*au hasard*" (avec égale probabilité $\frac{1}{m}$) l'une des m réponses proposées. Il procède de même et indépendamment pour chaque question.

H_2 En ce qui concerne la procédure de dépouillement, chaque question a même coefficient (a même "*poids*") dans le test.

On remarquera que ces hypothèses excluent entre autres la situation où le candidat ayant une "obscure clarté" d'une question élimine d'office certaines réponses "outrageusement" fausses ; on serait alors ramené, pour la question, à un choix restreint parmi m' réponses, avec $m' < m$. Elles se placent systématiquement dans la situation où le candidat vise le score maximum et choisit *même dans l'ignorance* ; en pratique, il n'est pas exclu qu'un candidat (trop ?) scrupuleux ne réponde *que* s'il connaît la question ; on pourrait essayer de définir un dépouillement qui tende à "renforcer" ce comportement, par exemple en pénalisant fortement toute mauvaise réponse.

D'autre part nous nous plaçons dans une *situation d'examen* et non de concours.

Dans ce dernier cas la règle de décision serait évidente : on dépouille les scores de tous les candidats ; on détermine le score-seuil ℓ tel qu'il y ait la quantité voulue de candidats dont le score x est supérieur ou égal à ℓ ; est déclaré reçu le candidat pour lequel $x \geqslant \ell$.

Dans un dépouillement type examen il y a lieu de se fixer au préalable une règle de décision, c'est-à-dire une valeur seuil ℓ, vraisemblablement fonction de n et m . Nous en reparlerons.

Soit un candidat C qui remplit un test Q.C.M. bien précisé (c'est-à-dire pour lequel les paramètres naturels n, m, ℓ sont fixés

($0 < \ell \leqslant n$ et $m > 1$)). Supposons que ce candidat connaisse avec précision la réponse à s questions ($0 \leqslant s \leqslant n$). Il donne au hasard les réponses des $n - s$ autres. Soit X la variable aléatoire définie comme suit :

X est le nombre de réponses exactes cochées par le candidat.

On a alors d'après les hypothèses faites :

$$X = s + Y$$

où Y est une variable aléatoire — nous noterons v. a. — qui suit une loi binomiale de paramètres $n - s$ et $\frac{1}{m}$:

$$\mathcal{B}\left(n - s, \frac{1}{m}\right).$$

Nous noterons pour abréger dans tout ce texte : $\mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n,p)$ la proposition suivante : la variable aléatoire Y suit une loi binomiale de paramètres n et p ; c'est-à-dire :

$$P(Y = k) = C_n^k\, p^k\, (1 - p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

La probabilité $P_s(r)$, pour le candidat qui connaît s questions sur les n, d'être reçu, si le score-seuil est ℓ, vaut donc :

$$\boxed{P_s(R) = P(X \geqslant \ell) = P(Y \geqslant \ell - s) = \sum_{k=\ell-s}^{n-s} C_{n-s}^k \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-s-k}} \qquad \text{(A)}$$

Nous appellerons *courbe de réussite* le graphe de la fonction $s \longmapsto P_s(R)$ qui au nombre de questions sues par un candidat fait correspondre la probabilité $P_s(R)$ que ce candidat a d'être reçu.

Exemple : $n = 10$, $m = 5$, $\ell = 6$

Soit un candidat qui connaît 2 questions ($s = 2$) à un test de 10 questions à 5 réponses où la valeur seuil est 6. La probabilité qu'il a d'être reçu est la probabilité que ses 8 réponses au hasard lui fournissent au moins 4 bonnes réponses soit :

$$P_4(R) = P(Y \geqslant 4) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}\left(8, \frac{1}{5}\right)$$

donc :

$$P_4(R) = P(Y = 4) + P(Y = 5) + P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8)$$

$$= C_8^4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 + C_8^5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^3 + C_8^6\left(\frac{1}{5}\right)^6\left(\frac{4}{5}\right)^2 + C_8^7\left(\frac{1}{5}\right)^7\left(\frac{4}{5}\right)^1 + C_8^8\left(\frac{1}{5}\right)^8$$

$$\simeq 0{,}0459 + 0{,}0092 + 0{,}0011 + 0{,}00001 + 0{,}0000 = 0{,}0563$$

On procède de même pour les autres valeurs de s. On trouve :

s	0	1	2	3	4	5	6	...	10
$P_s(R)$	0,0064	0,0196	0,0563	0,1480	0,3446	0,6723	1	...	1

Nous avons tracé en figure 1 la courbe de réussite correspondante ; bien que la construction n'ait pas de signification précise, nous avons joint par une courbe continue les points du graphe. La courbe en escalier :

$$y = 0 \qquad \text{si } 0 \leqslant s < 6$$
$$y = 1 \qquad \text{si } 6 \leqslant s \leqslant 10$$

est la courbe de réussite du "candidat scrupuleux" (qui ne répond que lorsqu'il sait). L'écart entre les deux courbes montre l'"influence du hasard" (figure 1).

II — De quelques exemples

Pour $n = 30$, $m = 2$ (figure 2), $m = 5$ (figure 3) et différentes valeurs seuil ℓ, nous avons tracé les différentes courbes de réussite en nous aidant d'une table des distributions binomiales (cf. par exemple [1]). Ces courbes donnent une bonne idée des conséquences impliquées par le choix de ces paramètres dans la construction d'un test Q.C.M.

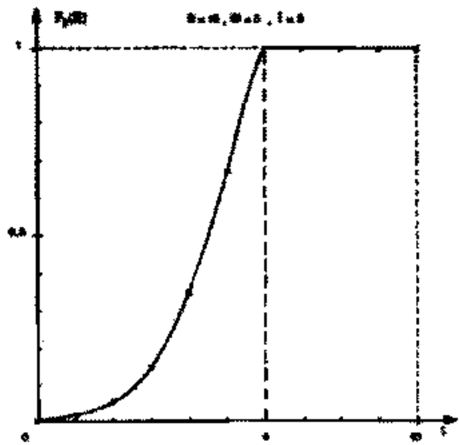


fig. 1

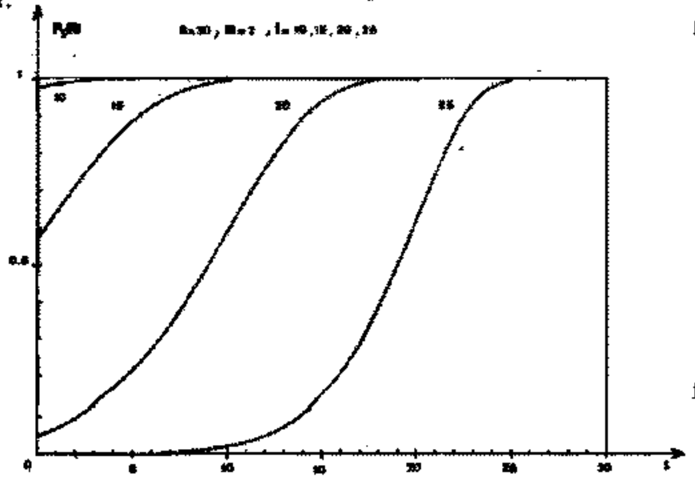
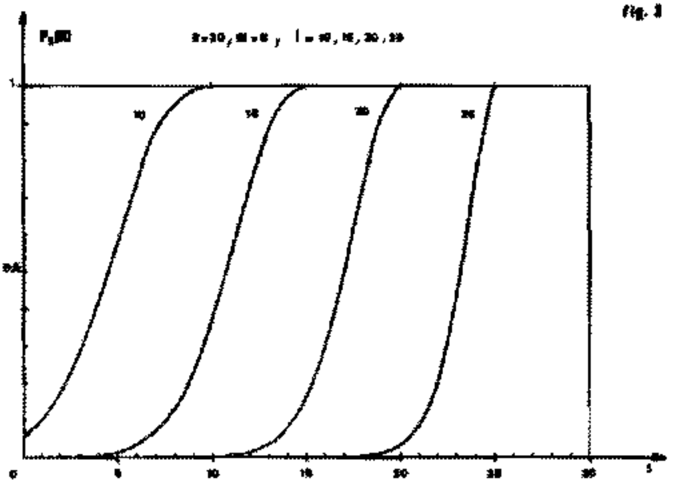
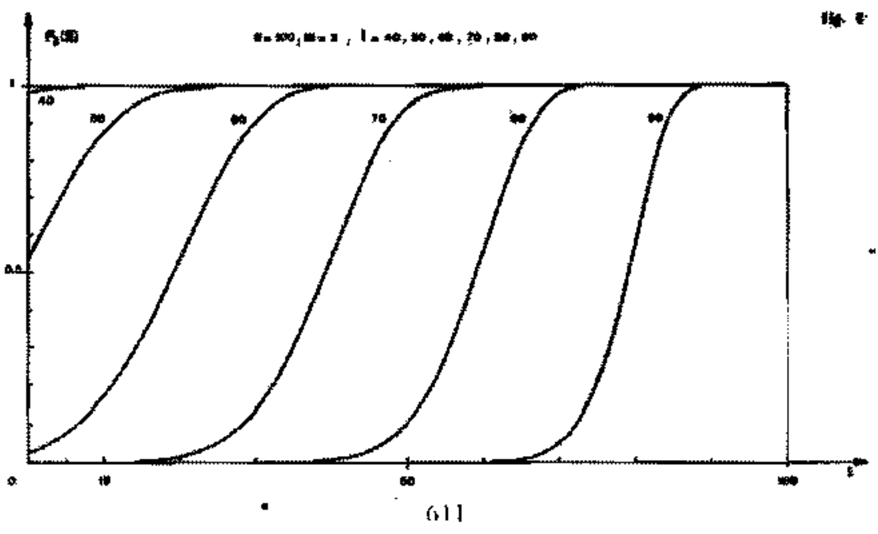
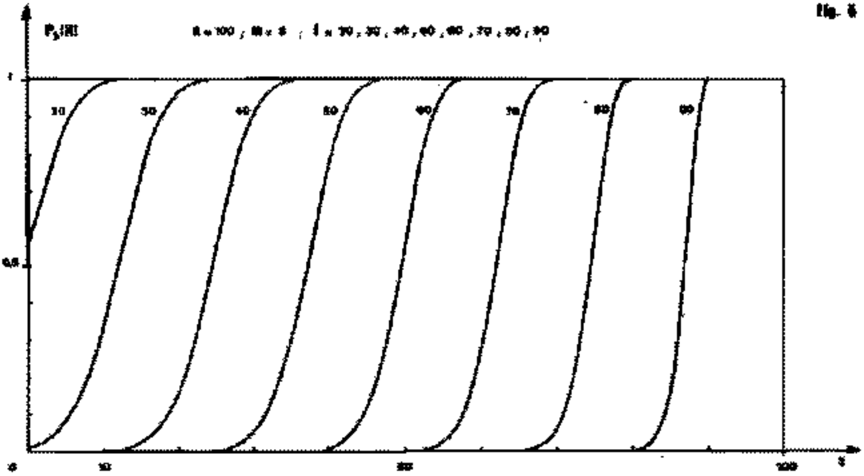


fig. 2



En figures 4, 5 nous avons tracé les courbes de réussite pour n = 100, m = 2,5 respectivement et différentes valeurs de ℓ .





Approximation Gaussienne

Pour n suffisamment grand * la loi $\mathcal{B}$ (n,p) peut être approchée — d'après le théorème "de la limite centrée" — par une loi de Laplace-Gauss de même moyenne np et de même variance npq (avec $q = 1 - p$) ; nous noterons cette dernière loi : L. G.(np, npq) ; autrement dit :

$$P_s(R) = P(Y \geqslant \ell - s) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}\left(n - s, \frac{1}{m}\right)$$

vaut sensiblement :

$$P_s(R) \simeq P(Z \geqslant \ell - s) \quad \text{où} \quad \mathcal{L}(Z) = \text{L.G.}\left(\frac{n-s}{m}, \frac{(n-s)(m-1)}{m^2}\right)$$

donc

$$P_s(R) \simeq P\left(Z' \geqslant \frac{\ell - s - \mu}{\sigma}\right) \quad \text{avec} \quad Z' = \frac{Z - \mu}{\sigma}$$

$$\mu = \frac{n-s}{m}$$

$$\sigma^2 = \frac{(n-s)\ (m-1)}{m^2}, \quad \sigma \geqslant 0$$

$$\left(\mathcal{L}(Z') = \text{L. G. } (0, 1)\right)$$

Par suite :

$$P_s(R) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{\ell - s - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{s + \mu - \ell}{\sigma}\right)$$

* En pratique ici l'approximation sera satisfaisante pour $n \geqslant 30$.

où $\Phi(t)$ est la fonction de répartition d'une v.a. L.G. (0, 1) c'est-à-dire

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

fonction tabulée sur tous les manuels de Statistiques (ou cf. par exemple [2]).

En résumé : *

$$\boxed{P_s(R) \simeq \Phi\left(\frac{n + (m-1)\, s - \ell\, m}{\sqrt{(n-s)(m-1)}}\right)} \qquad \text{(B)}$$

III — De quelques règles de décision

A) *Règle naïve*

Il est bien établi dans les esprits que la "moyenne" de n est $\frac{n}{2}$**. Nous appellerons "naïve" la règle qui consiste, dans un test Q.C.M, à choisir pour valeur seuil la valeur $\ell = \frac{n}{2}$, car elle nous fût présentée par un étudiant qui la considérait comme la seule "juste". (Mais cet étudiant était-il bien naïf ?).

Imaginons toutefois un singe dactylographe conditionné à cocher une et une seule des réponses de chaque question — ou disons un cancre parfait en ce sens qu'il ne connaît aucune réponse : $s = 0$. Sa probabilité de réussite à un tel test — pour lequel $\ell = \frac{n}{2}$ — est donnée, en fonction de n et m, dans le tableau (6). Elle est loin d'être négligeable pour de faibles valeurs de m.

---

* Pour n "modérément" grand, on peut améliorer l'approximation gaussienne de la distribution binomiale en utilisant la correction dite "de continuité", c'est-à-dire que l'on évalue :

$$P(Y \geqslant a) \qquad \text{où} \quad \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}(n, p)$$

par :

$$P(Y \geqslant a) \simeq 1 - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right) = \Phi\left(\frac{np - a + \frac{1}{2}}{\sqrt{npq}}\right)$$

Cette formule conduit à :

$$P_s(R) \simeq \Phi\left(\frac{n + (m-1)\, s - \ell\, m + \frac{m}{2}}{\sqrt{(n-s)(m-1)}}\right) \qquad \text{(B')}$$

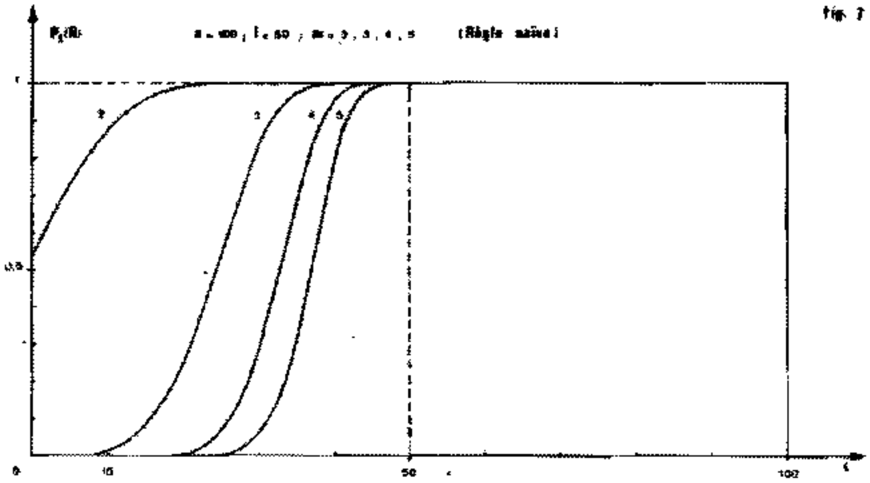
** Cette proposition fut rappelée il y a quelques années par un ancien chef de l'Etat lorsque $n = 20$.

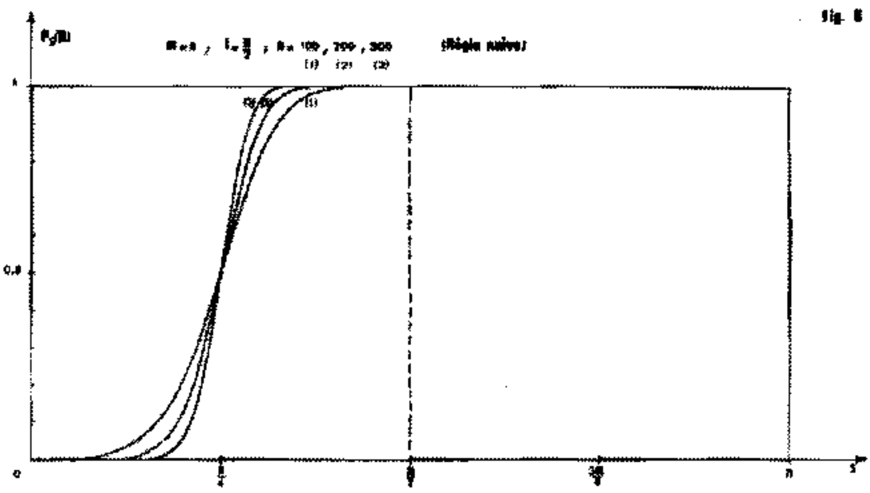
n \ m	2	3	4	5	10	20	100
1	0,5000	0,3333	0,2500	0,2000	0,1000	0,0500	0,0100
2	0,7500	0,5556	0,4375	0,3600	0,1900	0,0975	0,0199
3	0,5000	0,2593	0,1563	0,1040	0,0280	0,0073	0,0003
4	0,6875	0,4074	0,2617	0,1808	0,0523	0,0140	0,0006
5	0,5000	0,2099	0,1035	0,0579	0,0086	0,0011	—
6	0,6563	0,3196	0,1694	0,0989	0,0159	0,0022	—
7	0,5000	0,1733	0,0706	0,0333	0,0027	0,0002	—
8	0,6367	0,2587	0,1138	0,0563	0,0050	0,0004	—
9	0,5000	0,1449	0,0196	0,0196	0,0009	—	—
10	0,6231	0,2131	0,0781	0,0328	0,0016	—	—
20	0,5881	0,0919	0,0139	0,0026	—	—	—
30	0,5722	0,0435	0,0028	0,0002	—	—	—
100	0,5398	0,0004	—	—	—	—	—

Tableau (6) : Probabilités de réussite au test d'aptitude du singe dactylographe lorsque $\ell = \frac{n}{2}$.

Dans le cas limite où $m = 2$ elle est même égale à 1/2 si n impair (et supérieur à 1/2 si n pair) ; ce résultat est immédiat si l'on remarque que la distribution $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ est symétrique par rapport à la valeur $n/2$. Nous avons tracé les courbes de réussite pour $n = 100$, $\ell = 50$ et $m = 2,3,4,5$ en figure 7.

Pour montrer comment ces courbes évoluent avec n nous les avons tracées en figure 8, pour $m = 3$ et $n = 100, 200, 300$, en utilisant l'approximation gaussienne (formule B).

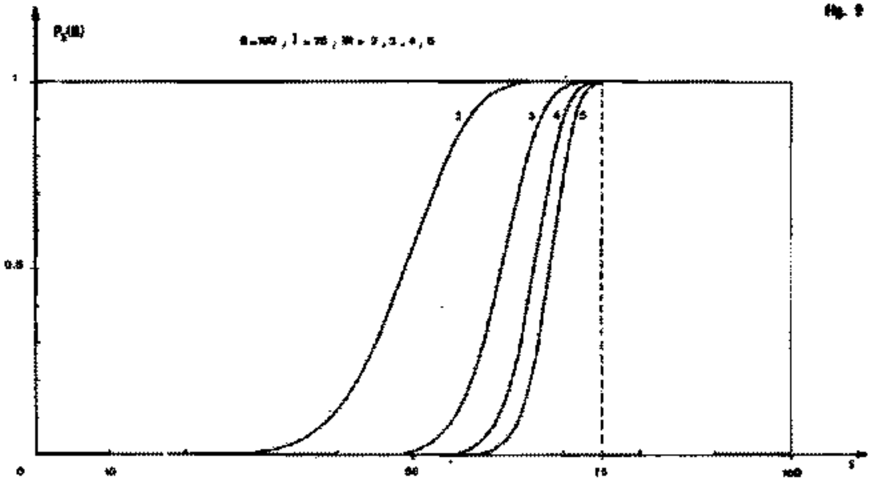




B) *Règles de décision* $\ell = \ell' n$ $(0 < \ell' < 1)$. *De quelques stratégies dans ces situations.*

Dans le même esprit que précédemment on peut considérer des tests où la valeur seuil est une fonction fixe, choisie arbitrairement, de n : $\ell = \ell' n$ $(0 < \ell' < 1)$; par exemple $\ell' = \frac{3}{4}$.

Nous avons représenté, en figure 9, les courbes de réussite pour $\ell = \frac{3}{4} n$; m = 2, 3, 4, 5 ; n = 100.



Supposons que l'on appelle "mauvais élève" celui qui ne connaît que s questions sur les n, avec $0 \leqslant s \leqslant a\,n$, où a est une constante donnée vérifiant $0 < a < 1$ (par exemple $a = \frac{1}{4}$).

Nous nous proposons de construire un test Q.C.M. où la *probabilité pour un mauvais élève d'être reçu est majorée par* α (par exemple $\alpha = 5\ \%$). On peut alors procéder de diverses manières (nous nous plaçons ici dans les conditions d'approximation gaussienne des lois binomiales) :

1) *n constant ; m constant ; choix de ℓ'.*

D'après la formule (B), $P_s(R)$ vaut sensiblement :

$$\Phi\left(\frac{1+(m-1)\,a-\ell' m}{\sqrt{(1-a)(m-1)}}\ \sqrt{n}\right).$$

Soit t_α la valeur telle que $\Phi(-t_\alpha) = \alpha$ ($t_\alpha = 1{,}6448$ pour $\alpha = 5\ \%$; $t_\alpha = 2{,}3296$ pour $\alpha = 1\ \%$; etc ...).

$\Phi(t)$ étant une fonction croissante, pour majorer par α l'expression précédente, il s'agit alors de prendre ℓ' tel que :

$$\frac{1+(m-1)\,a-\ell' m}{\sqrt{(1-a)(m-1)}}\ \sqrt{n} \leqslant -t_\alpha \qquad \text{(C)}$$

d'où :

$$\ell' \geqslant \frac{t_\alpha}{m}\sqrt{\frac{(1-a)(m-1)}{n}} + \frac{(m-1)\,a+1}{m}$$

Exemples :

Soit $n = 100$, $a = \frac{1}{4}$; pour $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$ et $m = 2,3,4,5$, on obtient les valeurs seuil ℓ minimums suivantes :

α \ m	2	3	4	5
0,05	70	57	50	46
0,01	73	60	53	49

2) *m constant ; ℓ' constant ; choix de n.*

D'après Ⓒ le problème est possible si :

$$1 + (m - 1)\,a - \ell'\,m < 0$$

soit

$$a < \frac{\ell'\,m - 1}{m - 1}$$

et l'on doit prendre :

$$\boxed{n \geqslant \frac{t_\alpha^2\ (m-1)\ (1-a)}{[(\ell' m - 1) - (m-1)\,a]^2}}$$

Exemples :

Soit $m = 4$, $\ell' = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$.

On obtient : pour $\alpha = 5\ \%$ $n \geqslant 98$
pour $\alpha = 1\ \%$ $n \geqslant 196$

3) *n constant ; ℓ' constant ; choix de m.*

D'après Ⓒ le problème est possible si :

$$1 - a + (a - \ell')\,m < 0$$

ce qui implique :

$$a < \ell' \quad \text{et} \quad m > \frac{1-a}{\ell' - a}$$

et l'on doit prendre $m \geqslant m_0$ où m_0 est la plus grande des deux racines (toujours réelles et positives) de l'équation :

$$m^2\,\frac{(\ell' - a)^2}{1 - a} - m\left[2\ell' - 2a + \frac{t_\alpha^2}{n}\right] + \left[1 - a + \frac{t_\alpha^2}{n}\right] = 0$$

Exemples :

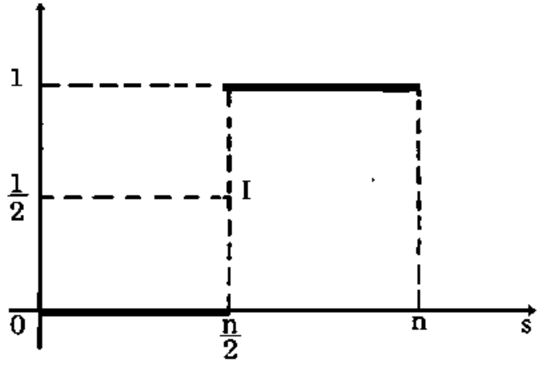
Soit $n = 100$, $\ell' = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$

On obtient : pour $\alpha = 5\ \%$ $m \geqslant 4$

pour $\alpha = 1\ \%$ $m \geqslant 5$.

C) ***Règle de décision*** $\mathcal{D}$

Imaginons un test d'aptitude pour lequel $\ell = \frac{n}{2}$ et où l'on ne propose pas de réponses aux diverses questions ($m = 0$); c'est le cas des examens traditionnels. La courbe de réussite est alors du type :



On peut alors définir dans le contexte Q.C.M. une autre règle de décision — que nous nommerons $\mathcal{D}$ — en imposant à la courbe de réussite de passer par le point I, c'est-à-dire en imposant aux paramètres n, m, ℓ la contrainte :

$$P_{\frac{n}{2}}(R) = \frac{1}{2}$$

(la probabilité qu'un candidat sachant la moitié des questions posées soit reçu est $\frac{1}{2}$).

Si nous sommes dans les conditions de l'approximation gaussienne, cette contrainte se traduit par :

$$\Phi\left(\frac{n + (m-1)\frac{n}{2} - \ell m}{\sqrt{\frac{n}{2}\ (m-1)}}\right) = \frac{1}{2}$$

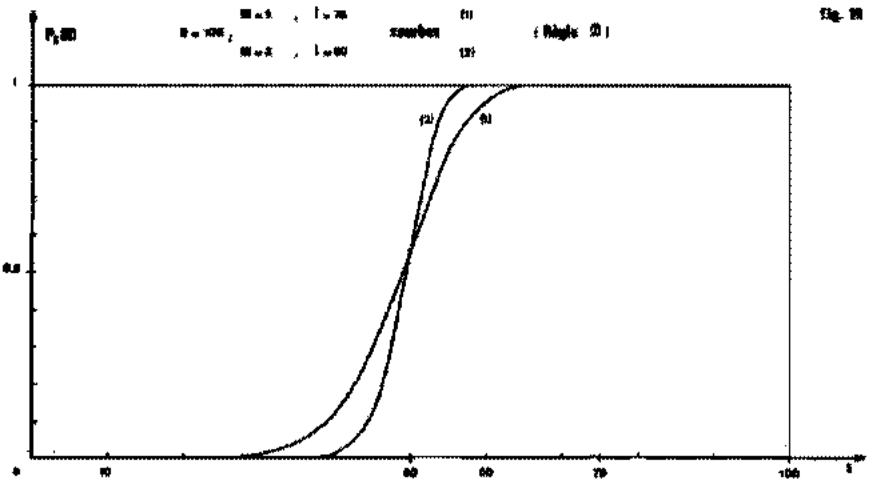
d'où :

$$n + (m-1)\frac{n}{2} - \ell m = 0$$

soit :

$$\boxed{\ell = \frac{n\,(m+1)}{2\,m}}$$

La formule Ⓑ' conduit à : $\ell_1 = \dfrac{n(m+1)}{2m} + \dfrac{1}{2}$; en pratique, on prendra pour seuil la partie entière de cette dernière expression ; la courbe ne passera pas rigoureusement par I. Nous avons tracé, en figure 10, les règles $\mathcal{D}$ pour $n = 100$, $m = 2$(1) et $n = 100$, $m = 5$(2).



D) *Règle Minimax*

Nous allons définir (nous ne sommes pas exhaustifs) une dernière règle de décision dite minimax.

Appelons "mauvais" élève un élève pour lequel $s \leqslant a\,n$ et "bon" élève un élève pour lequel $s \geqslant b\,n$ avec $0 < a < b < 1$. Un test Q.C.M. étant bâti, faire choix de $\ell = \ell' n$ $(0 < \ell' < 1)$ c'est s'exposer à deux types de risques :

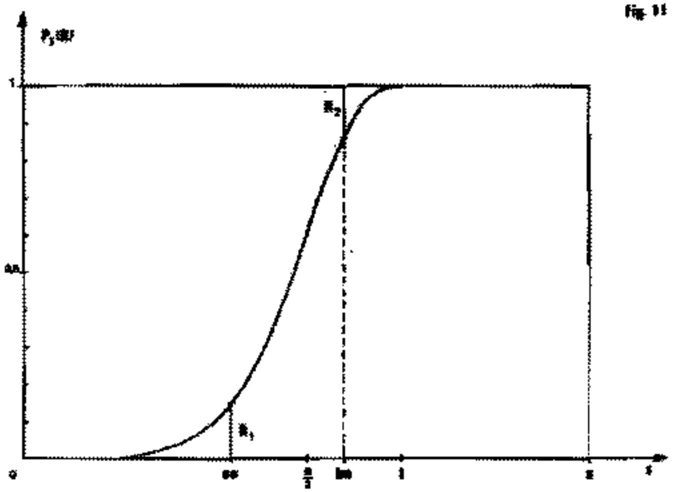
1 — Risque de type 1 : recevoir un "mauvais" élève ; la valeur maximum R_1 de ce risque est : $P_{an}(R)$, soit sensiblement :

$$R_1 \simeq \Phi\left(\frac{1 + (m-1)\,a - \ell' m}{\sqrt{(1-a)\,(m-1)}}\ \sqrt{n}\right)$$

2 — Risque de type 2 : refuser un "bon" élève ; la valeur maximum R_2 de ce deuxième risque est : $1 - P_{bn}(R)$, soit sensiblement :

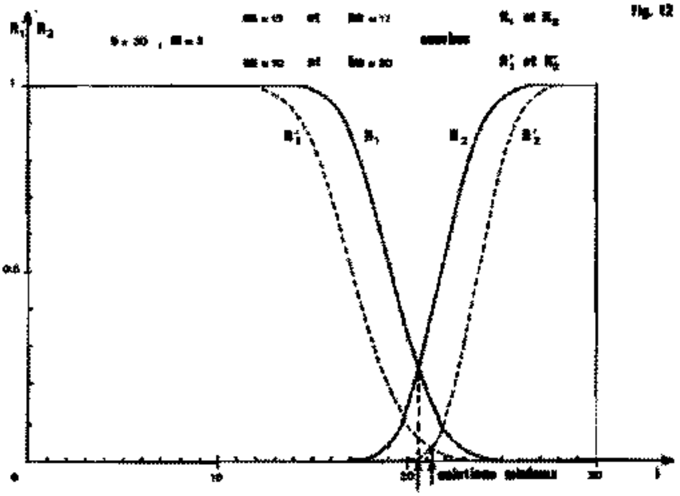
$$R_2 \simeq \Phi\left(\frac{\ell' m - 1 - (m-1)\,b}{\sqrt{(1-b)(m-1)}}\ \sqrt{n}\right)$$

fig. 11



Ces risques sont antagonistes : quand ℓ croît, R_1 décroît et R_2 croît (cf. figure 12)

fig. 12



Il en résulte que le risque maximum encouru : $R = \text{Max}(R_1, R_2)$ est minimum pour $R_1 = R_2$, ce qui est obtenu pour :

$$\boxed{\ell' = \frac{(1+(m-1)a)\sqrt{1-b} + (1+(m-1)b)\sqrt{1-a}}{m\left(\sqrt{1-b} + \sqrt{1-a}\right)}}$$

C'est la solution dite minimax.

Lorsque les valeurs a et b sont symétriques par rapport à $\frac{1}{2}$, on peut poser :

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} - d \\ \\ b = \frac{1}{2} + d \end{cases} \qquad 0 < d < \frac{1}{2}$$

La formule précédente se simplifie en :

$$\boxed{\ell' = 1 - \frac{m-1}{m}\sqrt{\frac{1}{4} - d^2}}$$

On remarque que cette solution est *stable* (ce qui est assez satisfaisant pour l'esprit), pour des valeurs de d pas trop élevées, et pratiquement égale à la valeur $\ell' = \frac{m+1}{2m}$, déjà obtenue pour la règle $\mathcal{D}$ (cf. figure 13 où nous avons indiqué par des croix, pour m = 3, des solutions minimax exactes déterminées lorsque n = 100.)

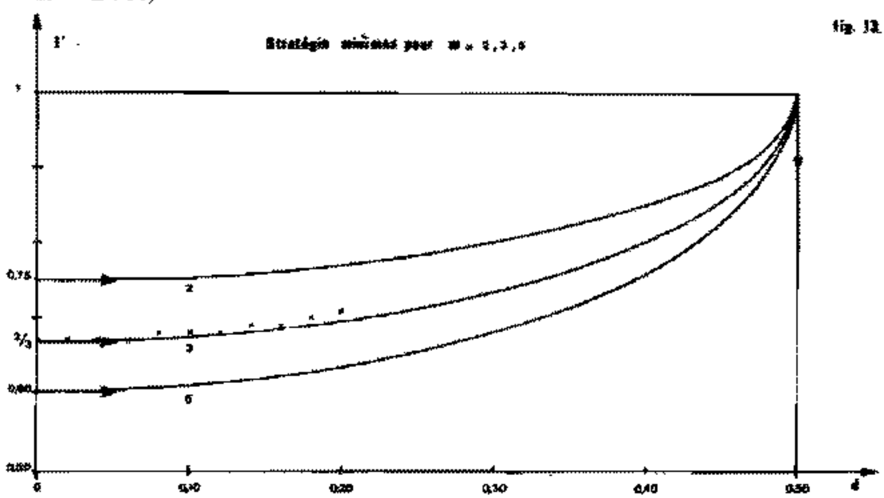


fig. 13

IV — De l'estimation des connaissances

Au III nous nous sommes placés dans l'optique de la *construction* du test ; plaçons-nous maintenant dans celle de *l'analyse des résultats.* Plus précisément, soit le problème pratique suivant : "Sachant qu'un candidat a fourni x bonnes réponses, quel nombre s de questions connaissait-il réellement ? ".

Nous ne fournirons pas une estimation précise ("ponctuelle") de s mais nous utiliserons la méthode d'*estimation dite par "intervalle de confiance"* (cf. par exemple [3] pages 200-204).

Faisons choix d'un risque 2α (par exemple $\alpha = 5~\%$ ou $\alpha = 1~\%$ ...). Nous avons vu au I que le nombre de réponses exactes fournies est :

$$X = s + Y \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{L}(Y) = \mathcal{B}\left(n - s, \frac{1}{m}\right)$$

Si l'on néglige les deux "queues de distribution" de la loi de Y qui ont chacune une probabilité α, on est amené à affirmer — au risque 2α — que :

$$r_1 \leqslant Y \leqslant r_2 \qquad \text{avec} : \quad \begin{aligned} r_1 &= \text{Sup}\,\{r\,;\,P(Y < r) \leqslant \alpha\} \\ r_2 &= \text{Inf}\,\{r\,;\,P(Y > r) \leqslant \alpha\} \end{aligned}$$

soit, ce qui est équivalent, si l'on possède la tabulation de :

$$E(n, p\,;\,r) = \sum_{k=r}^{n} C_n^k\, p^k\, q^{n-k}$$

$$r_1 = \text{Sup}\left\{r\,;\,E\left(n - s, \frac{1}{m}\,;\,r\right) \geqslant 1 - \alpha\right\}$$

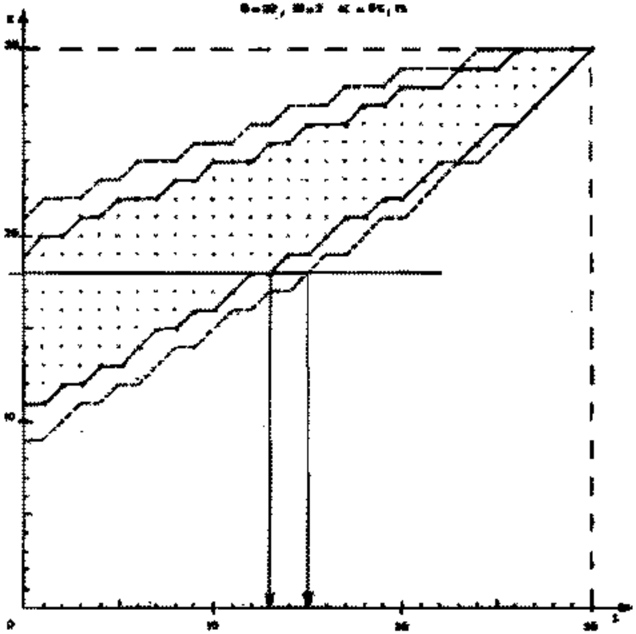
$$r_2 = \text{Sup}\left\{r\,;\,E\left(n - s, \frac{1}{m}\,;\,r\right) > \alpha\right\}$$

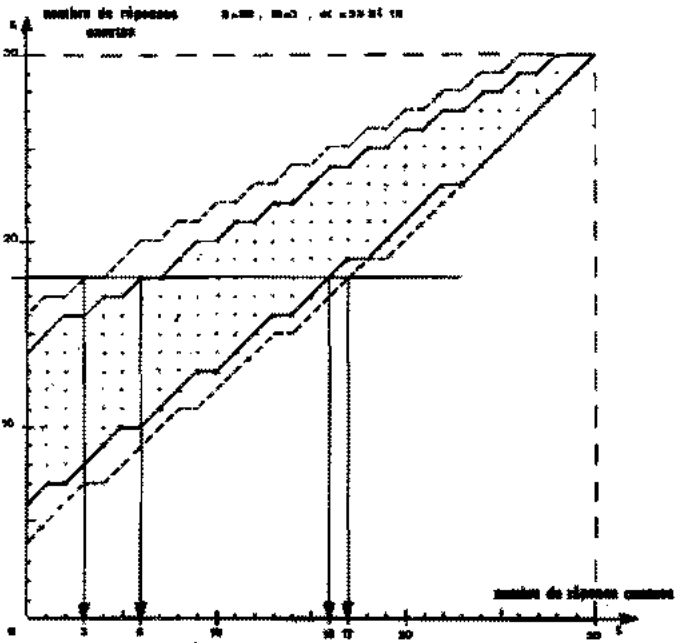
à affirmer que :

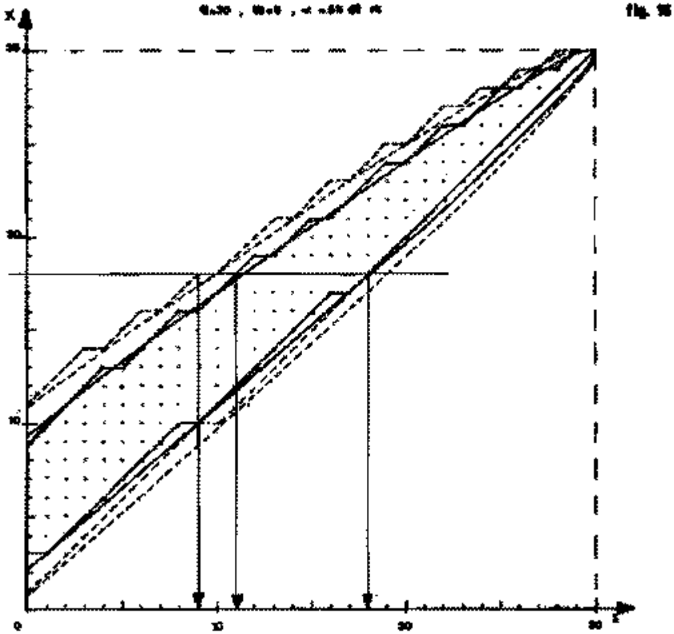
$$s + r_1 \leqslant X \leqslant s + r_2$$

Lorsque s varie de 0 à n ces relations définissent un certain domaine qui permet inversement, pour un x donné, d'estimer un intervalle $[s_1, s_2]$ auquel s appartient vraisemblablement.

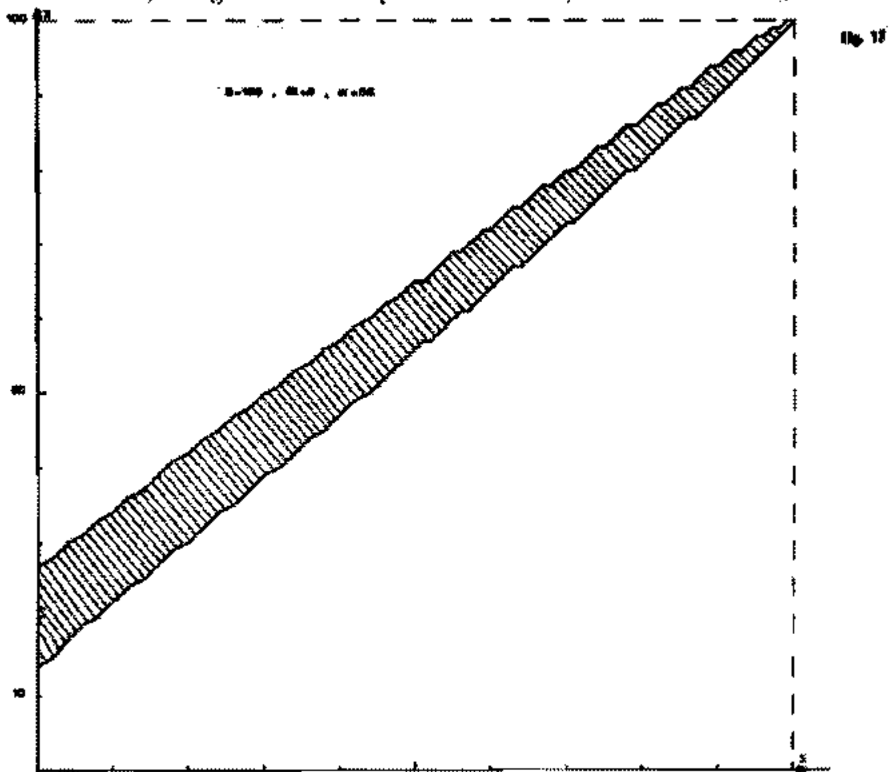
Sur les figures 14-16 nous avons précisé ces domaines exacts lorsque $n = 30$; $m = 2, 3, 5$, avec $\alpha = 5~\%$ (respectivement $\alpha = 1~\%$ en pointillé) ; on a construit l'intervalle d'estimation de s pour un candidat qui a fourni $x = 18$ bonnes réponses : par exemple, en figure 15, si un candidat a donné 18 réponses exactes à un test Q.C.M. de 30 questions à 3 réponses, on peut penser (au risque 10 %) qu'il connaissait en fait entre 6 et 16 réponses (respectivement entre 3 et 17 au risque 2 %).







En 17, la figure est faite pour $n = 100$; $m = 5$ et $\alpha = 5$ %.



Approximation gaussienne

Dans la mesure où l'on assimile la distribution $\mathcal{B}\,(n-s, \frac{1}{m})$ à la distribution L.G. $\left(\frac{n-s}{m}, \frac{(n-s)\,(m-1)}{m^2}\right)$, les valeurs r_1 et r_2 sont données par :

$$\begin{cases} r_1 = \dfrac{n-s}{m} - \dfrac{t_\alpha}{m}\sqrt{(n-s)\,(m-1)} \\ r_2 = \dfrac{n-s}{m} + \dfrac{t_\alpha}{m}\sqrt{(n-s)\,(m-1)} \end{cases} \quad \text{où } t_\alpha \text{ est défini par } \Phi(-t_\alpha) = \alpha$$

et lorsque s varie ces valeurs délimitent une *portion d'ellipse.*

Exemple :

Si $n = 30$; $m = 5$, les valeurs de r sont données par :

$$6 + \frac{4}{5}s \pm 0{,}6579\sqrt{30-s} \qquad \text{si } \alpha = 5\ \%$$

et :

$$6 + \frac{4}{5}s \pm 0{,}9318\sqrt{30-s} \qquad \text{si } \alpha = 1\ \%$$

On a tracé ces domaines elliptiques sur la figure 16.

V — Conclusion

On pourrait prolonger cette étude en se demandant — entre autres — ce qu'il en est :

1) pour des tests "mixtes" : par exemple n_1 questions à m_1 réponses et n_2 questions à m_2 réponses ; si la valeur seuil est ℓ, si le candidat connaît s_1 questions de la première catégorie et s_2 de la seconde, la probabilité qu'il a alors d'être reçu en répondant au hasard aux questions non sues est :

$$P_{s_1, s_2}(R) = P(s_1 + s_2 + X_1 + X_2 \geqslant \ell)$$

$$\text{où :} \quad \mathcal{L}(X_1) = \mathcal{B}\,(n_1 - s_1, \frac{1}{m_1})$$

$$\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{B}\,(n_2 - s_2, \frac{1}{m_2})$$

2) pour des questions "pondérées" : par exemple n_1 questions à m_1 réponses à coefficient a_1 et n_2 questions à m_2 réponses à coefficient a_2 ; on a alors :

$$P_{s_1, s_2}(R) = P(N \geqslant \ell)$$

où $N = a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_1 X_1 + a_2 X_2$, X_1 et X_2 suivant les lois précédemment explicitées.

Ces prolongements nécessitent l'étude de la distribution de $X_1 + X_2$ (respectivement $a_1 X_1 + a_2 X_2$) ; les courbes de réussite deviendraient des surfaces de réussite :

$$(s_1, s_2) \longmapsto P_{s_1, s_2}(R)$$

On ne peut donc s'attendre à une analyse simple de ces tests Q.C.M. "mixtes" ou "pondérés". D'autre part, ces derniers se répandent peu : le test Q.C.M. ne tient pas, semble-t-il, à perdre son principal élément de séduction ; son extrême simplicité de dépouillement.

En résumé, nous avons été amené ici :

— à donner une formulation probabiliste des réponses à un test Q.C.M.

— à cerner avec précision le "rôle du hasard" pour un certain nombre de tests

— à définir, à partir de critères précis, des règles de décision quant à la construction de ces tests

— à donner une estimation du nombre de réponses réellement sues partant du nombre de réponses exactes fournies.

A nos yeux, l'essentiel est surtout d'avoir une idée précise des conséquences impliquées par le choix des paramètres du test Q.C.M., dans la situation — bien naturelle — de réponse même dans l'ignorance ; or celles-ci ne sont pas toujours très nettes dans l'esprit de tous les utilisateurs.

Références utilisées :

[1] Tables of the Cumulative Binomial Probability Distribution ; Harvard University Press, 1955

[2] M. BOLL — Tables Numériques Universelles ; Dunod 1957

[3] L. GUERBER et P.L. HENNEQUIN — Initiation aux probabilités ; Bibliothèque d'Enseignement Mathématique de l'A.P.M.E.P. ; 1968