1

ETUDES

La notion de clôture et ses applications

par J. C. HERZ

1 — CLOTURE ABSTRAITE (BIRKHOFF 1948)

E est un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$. Une application α dans E est appelée une *clôture* si elle vérifie les trois propriétés :

(1) $(\forall x \in E) \quad x \leqslant \alpha x$ (extensivité),

(2) $(\forall x,\ y \in E) \quad x \leqslant y \Rightarrow \alpha x \leqslant \alpha y$ (isotonie)

(3) $\alpha \circ \alpha = \alpha$ (idempotence)

Exemples :

a — Clôtures triviales :

a_1 - l'application identique $\alpha : \ x \mapsto x$;

a_2 - s'il existe un élément maximum I, $\alpha : \ x \mapsto I$.

b — Dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, l'application associant à un nombre x sa valeur par excès à p^n près (p entier positif, n entier).

c — Dans $\mathbb{N}$, si la notation $x \leqslant y$ signifie "x est multiple de y", l'application associant à un naturel x le nombre ayant les mêmes facteurs premiers, chacun figurant avec l'exposant

c_1 - 1

c_2 - égal au plus petit des exposants des facteurs de x .

Un élément *clos* pour une clôture α est un élément invariant par α . En vertu de l'idempotence, l'ensemble des éléments clos est l'image αE de α .

2 — CLOTURE ENSEMBLISTE (MOORE 1910)

Dans toute la suite E sera l'ensemble $\mathcal{P}$ (A) des parties d'un ensemble A, ordonné par l'inclusion. C'est alors un treillis booléen complet. Une clôture de E sera appelée *clôture dans A*, un élément clos de E une *partie close* de A.

Les axiomes de clôture s'écrivent :

(1) $(\forall X \subset A) \quad X \subset \alpha X$

(2) $(\forall X, Y \subset A) \quad X \subset Y \Rightarrow \alpha X \subset \alpha Y$

(3) $(\forall X \subset A) \quad \alpha\alpha X = \alpha X$

On voit facilement que l'ensemble α E des parties closes de A possède la propriété :

(4) $(\forall \mathcal{F} \subset \alpha E) \quad \left(\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X\right) \in \alpha E$.

(Dans le cas où $\mathcal{F}$ est vide, $\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$ est A).

Nous disons que α E est *stable pour l'intersection.*

Réciproquement, si $\mathcal{C}$ est une partie de E vérifiant :

(5) $(\forall \mathcal{F} \subset \mathcal{C}) \quad \left(\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X\right) \in \mathcal{C}$,

la transformation de E associant à X l'ensemble :

(6) $\hat{X} = \bigcap_{\substack{Y \supset X \\ Y \in \mathcal{C}}} Y$

est une clôture dans A dont l'image est $\mathcal{C}$. On voit qu'ici une clôture est entièrement déterminée par l'ensemble des clos.

3 — EXEMPLES

Dans la plupart des exemples de ce paragraphe, on définit un ensemble $\mathcal{C}$ dont on peut vérifier qu'il satisfait à 2(5) ; on peut donc en déduire une clôture par 2(6).

a — Si A est le produit cartésien de deux ensembles, la correspondance qui à une partie X de A associe le produit $\hat{X}$ de ses deux projections est une clôture dans A. $\hat{X}$ est appelé *fermeture rectangle* de X.

b — Si A et B sont deux ensembles et R une relation de A vers B, la correspondance qui à une partie X de A associe l'ensemble des éléments de A qui sont dans la relation R avec tous les éléments de B qui sont dans la relation R avec tous les éléments de X est une clôture dans A. (EVERETT 1944).

c — Si A est un espace métrique, l'ensemble $\mathcal{C}$ de ses parties fermées vérifie 2(5). La clôture correspondante associe à un ensemble de points son *adhérence* (ou fermeture).

d — Si A est un groupe, l'ensemble $\mathcal{C}$ de ses sous-groupes vérifie 2(5). La clôture correspondante associe à une partie X de A le *sous-groupe* $\hat{X}$ *engendré* par cette partie (1). Propriété analogue pour les anneaux, corps, modules, espaces vectoriels, algèbres.

e — Si A est un anneau, l'ensemble $\mathcal{C}$ de ses idéaux à gauche vérifie 2(5). La clôture correspondante associe à une partie de A l'idéal à gauche engendré (1).

f — Si A est un anneau commutatif, l'ensemble $\mathcal{C}$ des parties C de A telles que tout élément de A racine d'une équation algébrique à coefficients dans C appartienne à C vérifie 2(5). La clôture correspondante associe à une partie de A sa *fermeture algébrique.*

g — Si A est l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{C}$ des parties convexes de A vérifie 2(5). La clôture correspondante associe à un ensemble de points son *enveloppe convexe.*

h — Si A est le carré cartésien d'un ensemble B, toute partie de A est le graphe d'une relation binaire dans B. L'ensemble $\mathcal{C}$ des graphes des relations transitives dans B vérifie 2(5). La clôture correspondante associe (par leurs graphes) à une relation dans B sa *fermeture transitive.* Propriété analogue pour les relations réflexives, symétriques.

4 — CLOTURE DEFINIE PAR UN ENSEMBLE D'OPERATEURS

Soit q un entier positif. Une relation R $(q+1)$ — aire dans l'ensemble A peut être identifiée à l'application ω de A^q dans $\mathcal{P}(A)$:

$$\omega \; : \; (x_1, \ldots, x_q) \longmapsto \{ x_{q+1} \mid R(x_1, \ldots, x_q, x_{q+1}) \} .$$

Nous appellerons ω *opérateur à q arguments* dans A. Si R est fonctionnelle (resp. semi-fonctionnelle) en x_{q+1} c'est-à-dire si, pour tout x de A^q, $|\omega x| = 1$ (resp. $|\omega x| \leqslant 1$), ω sera dit *fonctionnel* (resp. *semi-fonctionnel*) (*).

(1) Si X est vide, $\hat{X}$ est le sous-groupe à un élément. On pourrait définir une autre clôture en adjoignant à $\mathcal{C}$ la partie vide, qui serait alors close. Même remarque pour les idéaux d'un anneau.

(*) Voir paragraphe 6.

Une partie C de A sera dite *close* pour ω si $\omega\, C^{a} \subset C$.

(Ici et dans la suite, ω B est mis pour $\bigcup_{x \in B} \omega\, x$.)

Soit Ω un ensemble d'opérateurs dans A. L'ensemble $\mathcal{C}$ des parties de A closes pour tout élément de Ω vérifie 2(5).

La clôture correspondante sera notée $C\ell_{\Omega}$.

Parmi les clôtures données en exemple au paragraphe 3, la plupart peuvent être définies par des opérateurs :

a — On considère l'opérateur fonctionnel ω associant au couple $((x,y),(y',z))$ d'éléments de A le singleton $\{(x,z)\}$. Les parties closes pour ω sont les fermetures rectangles.

d — Si l'opération de groupe est notée multiplicativement, on considère l'opérateur fonctionnel unique

$$\omega : (x,y) \longmapsto \{x^{-1}\, y\}.$$

Les parties closes sont les sous-groupes et la partie vide. Pour une algèbre A sur un corps commutatif K, où les opérations internes sont notées + et * et l'opération externe notée multiplicativement, on considère l'ensemble d'opérateurs fonctionnels $\Omega' \cup \{\omega_1, \omega_2\}$ où Ω' est en bijection avec K, à $\lambda \in K$ étant associé l'opérateur

$$x \mapsto \{\lambda x\},\ \omega_1 : (x,y) \mapsto \{x+y\},\ \omega_2 : (x,y) \mapsto \{x * y\}.$$

Les parties closes sont les sous-algèbres et la partie vide. Propriétés analogues pour les anneaux, corps, modules, espaces vectoriels.

e — Si les opérations d'anneau sont notées additivement et multiplicativement, on considère l'ensemble d'opérateurs fonctionnels $\Omega' \cup \{\omega\}$ où Ω' est en bijection avec A, à $z \in A$ étant associé l'opérateur $x \mapsto \{z\,x\}$, et $\omega : (x,y) \mapsto \{x - y\}$. Les parties closes sont les idéaux à gauche de A et la partie vide.

f — L'ensemble Ω est formé des opérateurs ω_p, (p entier positif) associant à une suite $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ d'éléments de A l'ensemble des éléments x de A vérifiant $\sum_{i=0}^{p} a_i\, x^i = 0$.

g — L'ensemble Ω est formé d'un opérateur unique ω associant au couple (x,y) le segment d'extrémités x et y.

h — L'ensemble Ω est formé d'un opérateur semi-fonctionnel unique ω associant au couple $((x,y),(y',z))$ la partie vide si $y \neq y'$, le singleton $\{(x,z)\}$ si $y = y'$.

5 — CONSTRUCTION RECURRENTE D'UNE CLOTURE DEFINIE PAR OPERATEURS

Si une clôture dans un ensemble A, notée $C\ell_{\Omega}$, est définie par un ensemble d'opérateurs Ω, on a pour toute partie X de A la relation

(1) $C\ell_{\Omega} X = \bigcup_{i \in N} X_i$

avec

(2) $X_0 = X$;

(3) $X_{i+1} = X_i \cup \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega X_i^{q\omega}$

(q_ω étant le nombre d'arguments de ω).

Dans certains des exemples du paragraphe 4, le processus de construction est fini. Ainsi, pour la fermeture rectangle,

$$C\ell_{\Omega} X = X_1 .$$

Pour l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^n$, on a

$$C\ell_{\Omega} X = X_n \qquad \text{(GHOUILA-HOURI 1962)}$$

Dans le cas où Ω ne comporte que des opérateurs à un seul argument, les formules (1) à (3) peuvent être remplacées par

(1') $C\ell_{\Omega} X = \bigcup_{i \in N} Y_i$

avec

(2') $Y_o = X$

(3') $Y_{i+1} = \bigcup_{\omega \in \Omega} \omega Y_i$

6 — CLASSES DE FONCTIONS CALCULABLES (LACOMBE 1960)

Ici l'ensemble A considéré est celui de toutes les applications de N^p dans N, pour tout $p \in N$ (appelées dans ce paragraphe *fonctions*). Les opérateurs considérés sont fonctionnels ou semi-fonctionnels et conservent la calculabilité effective : opérateurs de composition, de récurrence, de minimalisation, etc. En choisissant un ensemble X de fonctions calculables et un ensemble Ω de tels opérateurs, on définit une classe $C\ell_{\Omega} X$ de fonctions calculables, telle que la classe des fonctions récursives ou celle des fonctions récursives primitives.

Si on s'intéresse aux *semi-fonctions* (fonctions non partout définies, ou application d'une partie quelconque de N^p dans N, $p \in N$), on définit des classes de semi-fonctions calculables au moyen de certains opérateurs qui sont alors tous fonctionnels. Voir l'article cité.

Donnons quelques détails dans le cas plus simple de fonctions et semi-fonctions *d'une* variable (transformations et semi-transformations de N). (ROBINSON 1950). La classe des fonctions récursives d'une variable est $C\ell_{\{\gamma,\alpha,\iota\}} \{s,e\}$ où

$$s : x \mapsto x+1 \quad \text{fonction successeur}$$

$$e : x \mapsto x - ([\sqrt{x}])^2 \quad \text{fonction excès sur un carré}$$

$$\gamma : (f,g) \mapsto \{f \circ g\} \quad \text{opérateur de composition}$$

$$\alpha : (f,g) \mapsto \{f+g\} \quad \text{opérateur d'addition}$$

$$\iota : f \mapsto \begin{cases} \phi & \text{si } f(N) \neq N \\ \{f^{-1}\} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{opérateur d'inversion}$$

$f^{-1}(x)$ étant le plus petit entier y tel que $x = f(y)$.

La classe des semi-fonctions récursives d'une variable est $C\ell_{\{\gamma',\alpha',\iota'\}} \{s,e\}$ - Ici

$$\gamma'(f,g) = \{h\}$$

où $\quad h(x) = f(g(x))$ pour $x \in D_g \cap \{z \mid g(z) \in D_f\}$;

$$\alpha'(f,g) = \{k\}$$

où $\quad k(x) = f(x) + g(x)$ pour $x \in D_f \cap D_g$;

$$\iota'(f) = \{\ell\}$$

où $\quad \ell(x)$ est le plus petit entier y tel que $f(y) = x$

pour x tel que $(\exists\, y)\ f(y) = x$ *et* $[o, y] \subset D_f$
(D_f désigne l'ensemble de définition de f).

7 — LANGAGES (GROSS-LENTIN 1967)

Ici A est l'ensemble V* des *suites finies* d'éléments d'un ensemble V (généralement fini). On appelle *longueur* d'une suite le nombre de ses termes.

L'opération de *concaténation* dans A sera notée ici multiplicativement. Elle donne à V* la structure de *monoïde libre*.

Un langage sur V est une partie L de V*. Sa définition fait appel à trois types d'opérations :

a — Les opérations booléennes sur les parties de V^* .

b — Les opérations de concaténation sur les parties de V^* :

$L_1 L_2 = \{ x y \mid x \in L_1 , y \in L_2 \}$;

L^* est l'ensemble des concaténés finis d'éléments de L.

c — Les clôtures par opérateurs, qui vont être développées ci-après.

Nous définirons d'abord un opérateur *explicite* à q arguments au moyen d'un quadruplet (q, p, a, σ) :

p et q sont deux entiers positifs.

a est une application du segment $[0, p]$ dans V^*

σ est une application du segment $[1, p]$ dans le segment $[1, q]$.

L'opérateur associé ω est fonctionnel et défini par :

$$\omega (x_1 , ..., x_q) = \{ a_0 \, x_{\sigma_1} \, a_1 \, x_{\sigma_2} \, a_2 \, ... \, a_{p-1} \, x_{\sigma_p} \, a_p \}$$

Nous définirons ensuite un opérateur *implicite* à q arguments au moyen de q + 1 opérateurs explicites $\varphi, \psi_1, \psi_2, ..., \psi_q$ ayant le même nombre d'arguments, n :

$$w(x_1,...,x_q) = \{ \varphi(y_1,...,y_n) \mid \psi_1(y_1,...,y_n) = x_1,...,\psi_q(y_1,...,y_n) = x_q \}$$

On retrouve les opérateurs explicites comme cas particuliers :

$$\begin{cases} n = q \\ \psi_i : (y_1, ..., y_q) \mapsto y_i \end{cases}$$

Comme exemples d'opérateurs explicites, on a les opérateurs *préfixés* :

$p = q$; $\sigma_i = i$; a_i vide pour $i > 0$; a_0 de longueur 1 ;

les opérateurs *postfixés* : $p = q$; $\sigma_i = i$; a_i vide pour $i < p$; a_p de longueur 1 ;

les opérateurs *infixés* : $p = q = 2$; $\sigma_i = i$; a_1 de longueur 1 ; a_0 et a_2 vides (notation non parenthétique) où a_0 et a_2 de longueur 1, distincts entre eux et de a_1 (notation parenthétique).

De tels opérateurs sont utilisés dans la construction des formules de mathématiques et de logique.

On trouve des opérateurs implicites dans les *systèmes combinatoires* (ces opérateurs sont appelés dans l'ouvrage cité [schémas de] productions). Dans la forme générale, q = 1, n = 2,

$$\varphi : (y_1 , y_2) \mapsto a_0 y_1 a_1 y_2 a_2$$
$$\psi : (y_1 , y_2) \mapsto b_0 y_1 b_1 y_2 b_2$$

Dans les productions semi-thuïennes, a_o, a_2, b_o et b_2 sont vides. Dans les productions normales, a_1, a_2, b_o, b_1 sont vides. Dans les productions antinormales, a_o, a_1, b_1, b_2 sont vides.

Un *C-langage* L se définit au moyen d'une partition de V en deux parties V_a (vocabulaire auxiliaire) et V_t (vocabulaire terminal), d'un élément s de longueur 1 de V_a^* (axiome) et d'un ensemble Ω d'opérateurs semi-thuïens où le coefficient a_1 de chaque opérateur est de longueur 1 et dans V_a^* :

$$L = C\ell\,\Omega\,(\{s\}) \cap V_t^*$$

L'ensemble

$$C\ell\,\Omega\,(\{a_1\}) \cap V_t^*$$

est appelé catégorie syntaxique de a_1.

REFERENCES

BIRKHOFF 1948, Lattice Theory (2e éd.), American Mathematical Society, p. 49.

EVERETT 1944, Closure Operators and Galois Theory in Lattices, Trans. Amer. Math. Sci. 55, p. 5.

GHOUILA-HOURI 1962, Programmes, jeux, réseaux de transport, p. 23 .

GROSS, LENTIN 1967, Notions sur les Grammaires Formelles, Gauthier-Villars, pp. 28, 33, 79.

LACOMBE 1960, La théorie des Fonctions Récursives et ses Applications, Bull. Soc. Math. Fr. 88, p. 399.

MOORE 1910, Introduction to a Form of General Analysis, New-Haven, p. 53-80.

RIGUET 1948, Relations Binaires, Fermetures, Correspondances de Galois, Bull. Soc. Math. Fr. 76, pp. 114-117, 149-155.

ROBINSON 1950, General Recursive Functions, Proc. Amer. Math. Soc. 1, pp. 711-712.