Insertion de la logique dans l'enseignement élémentaire

par Maurice CARMAGNOLE (C.M. 2, Pierrefeu du Var)

Bien que la logique soit présente dans toutes les branches de notre savoir, et particulièrement en mathématique, on est étonné de constater qu'elle commence à peine à être enseignée dans le Supérieur, et qu'elle est toujours négligée aux niveaux secondaire et élémentaire.

Nous nous intéresserons à ce dernier niveau dans cet article, en commençant par constater que les maîtres qui y enseignent, pour la plupart traumatisés par des études mathématiques aberrantes, sont loin d'être en mesure d'envisager l'insertion de la logique dans leurs classes.

Une fois encore, et ce ne sera pas la dernière, nous soulignerons que la plupart des "centres de recyclage" qui s'occupent des instituteurs sont davantage des *cours* que des *chantiers de recherche*. L'effort numéro un doit être un effort peut-être douloureux, mais indispensable, en vue d'un renversement total de point de vue chez les formateurs. On ne peut pas gaver pendant plusieurs semaines l'esprit d'un maître du premier degré en l'endoctrinant de "mathématique nouvelle", et lui demander ensuite de bien se garder d'en faire autant dans sa classe.

Il faut bien comprendre que la majorité de ces maîtres n'a pas dépassé le niveau du baccalauréat (à une époque où même les structures fondamentales ne figuraient pas au programme), et que, depuis l'acquisition de ce grade, la majorité de cette majorité proclame à qui veut l'entendre que les mathématiques ont empoisonné leur vie d'étudiant. Ainsi, tracassés par cette nausée, nombre d'instituteurs vénèrent, et abhorrent à la fois, le professeur qui les recycle en ajoutant une bonne dose de terminologie moderne à celle qu'ils n'ont jamais maîtrisée dans leur jeunesse.

Dans le domaine particulier de la logique, il va de soi que nous ne parlerons pas d'enseignement au niveau élémentaire, ce qui poserait à cet âge la question saugrenue d'une métamathématique de cuisine. Mais il est possible, et je ne pense pas être le seul à l'avoir expérimenté, d'insérer une pensée logique avant onze ans, non seulement en heure de mathématique, mais surtout en toute heure de la journée.

Cette logique doit être rigoureuse, en cela que rien de ce qu'elle établira ne doit pouvoir être remis en cause plus tard. Mais elle est totalement exempte de formalisme, de règles, de symboles, de vocabulaire. Du moins aussi longtemps que l'enfant lui-même n'appelle pas vraiment le secours de cet arsenal.

L'exactitude du langage, la surveillance scrupuleuse du raisonnement, c'est le souci de chaque instant, en tout lieu : classe, stade, cour de récréation ... La pensée mathématique en est aidée et c'est au cours de l'heure réservée que mathématique et logique se découvrent alors simultanément.

Nous ne donnerons que quelques exemples :

L'égalité.

Le signe = se place entre deux désignations identiques ou différentes du même objet. Mais le mot MÊME, on le traque dans la conversation :

Monique et Christine ont le même manteau.
Ce sont deux soeurs : elles ont la même maman ...

et on décidera d'écrire :

manteau de Monique $\neq$ manteau de Christine
maman de Monique = maman de Christine,

après une discussion fructueuse où d'autres situations seront trouvées.

Autre exemple.

J'entre en classe avec mes élèves et je dis : "Cet après-midi, les filles dessineront".

Alertés par la permanence du raisonnement logique, les enfants vont se dire :

— les uns : "je suis fille, je dessine" (c'est l'ordre du maître)
— d'autres : "je suis garçon, je dessine" (rien ne l'interdit !)
— d'autres : "je suis garçon, je ne dessine pas" (nul ne me l'ordonne)

Ce n'est pas imaginaire, mais vécu. Je n'ai pas cru utile de dire aux enfants qu'ils venaient de dresser la table de l'implication et d'écarter le seul cas où, effectivement, cette implication est fausse :

— "je suis fille, je ne dessine pas".

Une excellente collègue a fait remarquer que de telles spéculations sont en contradiction avec le sens attribué ordinairement au langage courant. Dire : "*Cet après-midi les filles dessinent*", c'est vouloir dire : "*Cet après-midi SEULES les filles dessinent*".

Je ne dis pas non, et je me condamnerais si j'appelais avec insistance ma classe à couper les cheveux en quatre. En fait, ces réflexions ont été spontanées, et mes garçons savaient très bien qu'ils feraient autre chose que du dessin. Ils voulaient seulement me faire remarquer que, se limitant à ce que j'avais dit, certains d'entre eux pouvaient faire du dessin sans contrevenir aux données de l'énoncé.

Nous avons aussi exploré l'expression : "*aussi ... que ...*" et sa négation. Ainsi, on a accepté ce jugement sur André, petit homme de dix ans :

— André n'est pas aussi grand que le maître.

Mais j'ai dit ensuite : "Le maître n'est pas aussi grand qu'André". Brouhaha. On se récrie... mais on sait que j'invite à réfléchir. Alors on trouve :

— Bien sûr, le maître n'est pas AUSSI GRAND QUE puisqu'il est PLUS GRAND QUE ...

Nous analyons une phrase par grands groupes de fonctions, en essayant de changer la place de ces groupes selon diverses formations. Nous découvrons un jour la vérité suivante : une universelle existentialisée n'est pas une existentielle universalisée.

Du moins, c'est le galimatias du logicien. Nous, nous avons simplement vu que :

— Tous les jours, il y a un enfant qui se fait punir...

C'est bien différent de :

— Il y a un enfant qui se fait punir tous les jours.

Et alors, on en a trouvé des phrases qui se prêtaient à cette remarque !

La négation de l'universelle et de l'existentielle révèle aussi ses traquenards dans :

— Roger n'est pas sage tous les jours...

Les enfants ont trouvé deux solutions :

— Roger n'est pas sage TOUS LES JOURS $(\forall j , \neg s)$

et

— Roger n'est pas SAGE TOUS LES JOURS $(\exists j , \neg s)$

Là aussi, on piétine le sens commun de la langue. Le maître est tout de même là pour servir à quelque chose... mais ce qui est intéressant c'est cette recherche constante, de la part de l'enfant, des différents débouchés d'un énoncé. L'erreur serait de les pousser à spéculer sans cesse et à s'enfoncer dans des remarques stériles.

En ce qui concerne la négation, un jeu intéressant se pratique volontiers en salle, en guise de retour au calme après le sport :

Enfants assis en rond, le meneur de jeu (moi, pour commencer) énonce une proposition. Par exemple :

— Mon mouchoir est noir.

En même temps, le meneur de jeu montre un enfant A (au hasard). A doit montrer B (au hasard) en disant :

— Ce n'est pas vrai.

B montre C en niant alors la proposition initiale :

— Mon mouchoir n'est pas noir.

C montre D en disant :

— Ce n'est pas vrai.

D doit alors prévoir qu'il va reproduire la proposition initiale et montrer obligatoirement le meneur de jeu en disant :

— Mon mouchoir est noir.

C'est après rodage que le jeu devient intéressant. On accorde alors la possibilité de remplacer "ce n'est pas vrai" par "c'est faux", ou "ce n'est pas faux", ou "il est vrai que ce n'est pas faux", "il est vrai que ce n'est pas vrai" ... etc... et il faut que les transformations successives de la proposition obéissent à ces guidages imprévus.

Je ne puis donner de liste exhaustive des diverses situations exploitées : il faut absolument que la réforme s'oriente vers une indépendance totale du maître vis à vis des recettes et des manuels. Tout naît autour du maître, au milieu des enfants. Mais dans les quelques exemples ci-dessus on aura, j'espère, pressenti qu'il est important de faire prendre conscience aux tout jeunes que le langage naturel est souvent ambigu. Ce sera leur donner l'envie d'un langage plus sûr : le langage mathématique.

Aux journées de NANCY, le groupe A 01 (Insertion de la Logique), animé par J. ADDA, a insisté sur la double nécessité de développer la formation permanente des maîtres et l'insertion de la logique à tous les niveaux. Je crois même qu'il ne faut pas parler de "niveau" si on parle d'insertion. Même les concepts qui paraissent difficiles à appréhender quand on les formalise, sont perçus en toute sécurité par de jeunes enfants.

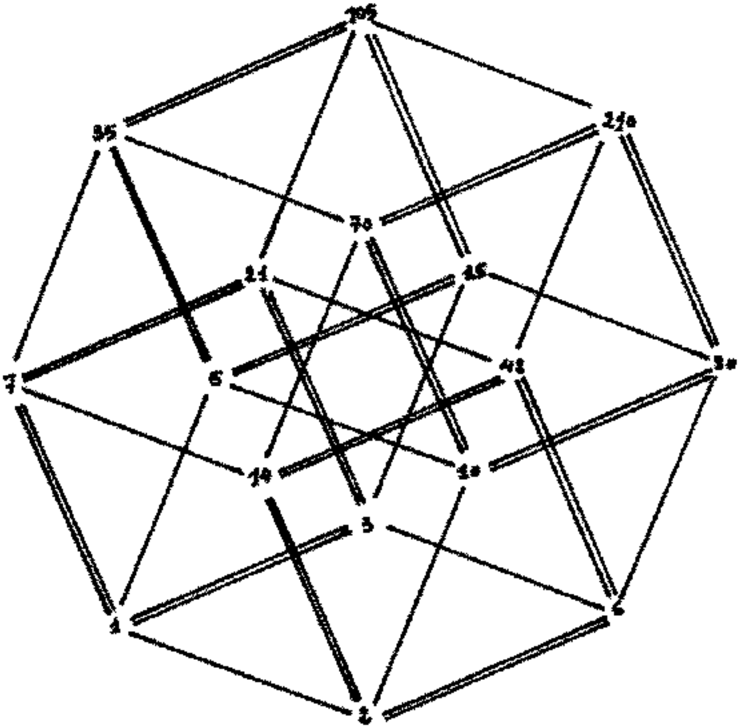
APPENDICE : Quelques sujets de recherche :

1. Donnons aux enfants, sans explication, le tableau :

1	2	3	5	
1	1	1	1	30
1	1	1	0	6
1	1	0	1	10
1	1	0	0	2
1	0	1	1	15
1	0	1	0	3
1	0	0	1	5
1	0	0	0	1

Ils observent un moment, et nous leur demandons alors de compléter la dernière colonne d'un autre tableau où on a placé (1,2,3,7) ou (1,3,5,7) etc... Puis nous discutons, nous en inventons d'autres. J'ai eu un bon groupe qui a "inventé" le tableau des diviseurs de 210 avec (1,2,3,5,7) et je crois que c'est singulièrement éducatif !

2. Recherches sur modèles (comme ci-joint le treillis des diviseurs de 210, que j'avais pris en charge après la trouvaille précédente). Voici un aperçu très incomplet de ce que les enfants y ont vu :



. il y a huit pairs et huit impairs,
. les pairs sont les doubles des impairs,
. tous les nombres sont des diviseurs de 210,
. on ne trouve pas deux fois le même nombre,
. de chaque nombre partent quatre traits,
. l'extérieur porte quatre pairs et quatre impairs, l'intérieur aussi,
. on voit 32 lignes : seize rouges et seize bleues,
. si je multiplie les nombres extérieurs j'obtiens le même nombre qu'en multipliant les nombres intérieurs,

etc ...

et ce ne sont là que les remarques faites hors de toute intervention du maître. Quand celui-ci a mis son grain de sel, la richesse de la figure s'est révélée telle qu'il a fallu interrompre les recherches à cause de la pléthore des découvertes !

3. Carrés magiques : ce Bulletin a publié des recherches entreprises avec des adultes sur les carrés magiques. Les enfants en sont friands, et si leurs conclusions sont différentes, ne disons pas qu'elles vont moins loin.

   Il est facile de poser :
   . une définition du carré magique,
   . certaines règles de transformation,
   qui permettent de passionner les moins de onze ans. Et si on a pu introduire les négatifs on s'achemine allègrement vers les groupes et les vectoriels.

4. Suites de naturels : je ne les signale que dans le cas où certains les oublieraient ... Mais c'est pur pessimisme de ma part ...

5. Arbres : Il faut s'en méfier si leur usage doit être un apriorisme, une recette. L'arbre ne doit venir qu'à l'appui de la découverte, et non comme une panacée dissipant le mal des permutations à sa naissance.

Beaucoup d'instituteurs penseront que tout cela "sort" des limites du programme allégé de 1970. En effet, je ne vise pas, par ces sortes d'investigations, à apprendre aux enfants des notions mathématiques. Parler en termes de programme, c'est viser l'apprentissage d'un certain nombre de choses en vue du passage en classe suivante. Le but ici poursuivi est autre : apprendre à chercher au moyen des techniques et des notions déjà connues, et tout au long de cette recherche, poursuivre avec rigueur le dépistage de l'à-peu-près, les traquenards de la fausse évidence, la mise au point d'une méthode de pensée.