Au-delà de "mathématique moderne"

par J. KUNTZMANN (Grenoble)

Les discussions autour de "Mathématique Moderne" se situent, en général, dans le contexte de la lutte du Bien et du Mal, de l'Ombre et de la Lumière. Je pense que cette manière de voir les choses n'est pas la bonne et je propose un éclairage différent : "Mathématique Moderne" est un mouvement qui est né dans un certain contexte historique, qui véhicule des idées, qui a obtenu des réformes, mais qui, comme tout mouvement, est destiné à être un jour, dépassé.

La figure 1 schématise la manière dont je vois à la fois le contexte historique et l'évolution.

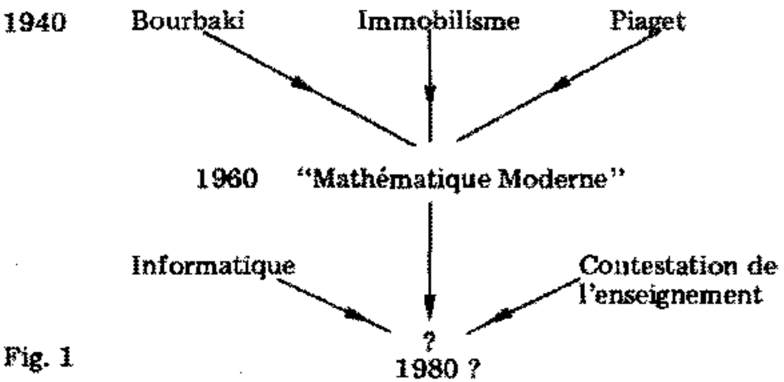

Fig. 1

Le contexte où est apparu "Mathématique Moderne"

Il faut évoquer d'abord l'immobilisme des programmes de mathématiques. Une étude comparative des programmes de premier cycle de 1902 à 1960 montre qu'il est possible de dessiner ceux-ci sur un même fonds, les programmes ne se distinguant les uns des autres que par des fluctuations de frontières.

Il faut évoquer ensuite les progrès de la psychologie génétique, progrès que l'on cristallise habituellement autour du nom de Piaget. Les conséquences de ces progrès ne sont encore pas toutes apparues, car ces progrès sont encore mal connus de la plupart des enseignants.

Enfin, le mouvement bourbakiste (qui se situe au niveau de la science mathématique et non à celui de son enseignement) a fait un double travail

— de rénovation par l'introduction de "structures" ;

— d'unification de la mathématique.

"Mathématique Moderne" est apparue comme mouvement dans différents pays un peu avant 1960. Une de ses premières manifestations a été le Colloque O.C.D.E. de Royaumont, en 1959. Ses leaders sont des mathématiciens universitaires et des enseignants de mathématiques.

Les idées-forces de "Mathématique Moderne"

Nous en indiquerons trois.

a) *Contenu et méthode*

"Mathématique Moderne" réclame une modification du contenu des programmes et, en même temps, une modification des méthodes de présentation.

Le lien, entre ces deux affirmations, n'est nulle part bien explicité. Je pense que cela peut se faire comme l'indique le schéma ci-dessous.

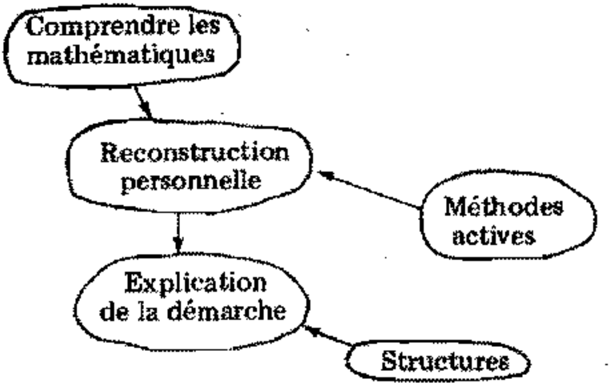

Fig. 2

b) *Fixation du contenu par les mathématiciens* — et, en particulier, fixation des échelons inférieurs en fonction des besoins des échelons supérieurs. Voici deux citations du professeur Stone, Colloque O.C.D.E., 1959, p. 17 et 23 :

"Il est indispensable de ..., si nous voulons que les étudiants soient familiarisés, à leur entrée à l'université, avec le genre de raisonnement mathématique que l'on attendra d'eux par la suite".

"Il est indispensable que nous arrivions à améliorer l'enseignement des mathématiques élémentaires si nous voulons pouvoir prendre les mesures voulues dans le cycle secondaire".

c) *Place faite aux structures*

Dans l'ancienne manière d'opérer, on s'intéressait à des objets relativement précis, par exemple le triangle. On en faisait une monographie relativement exhaustive. Le langage, les méthodes utilisés, étaient particuliers à l'objet.

On avait une mathématique disparate, et si l'objet de base était mal choisi (c'est justement le cas du triangle), compliquée.

Depuis Bourbaki, on définit la mathématique comme la science des structures.

Ces structures forment d'ailleurs, elles-mêmes, un ensemble structuré dont les bases sont les *structures-mères* (ensemble-relation ...).

A la suite de Bourbaki, "Mathématique Moderne" déplace le centre d'intérêt de l'enseignement en direction des structures. Ce déplacement consiste, en fait, assez souvent à utiliser un langage unificateur, l'étude de la structure elle-même étant hors de portée des lycéens.

Voici à ce sujet une citation de Dieudonné (Colloque O.C.D.E.) :

"Appeler un objet par son véritable nom, groupe ou relation d'équivalence par exemple, chaque fois que cet objet apparaît, n'implique nullement que l'on soit obligé de développer à l'avance la théorie abstraite des groupes ou des relations d'équivalence".

Caractères généraux de la réforme obtenue par "Mathématique Moderne"

Les caractères ci-dessous sont constatés dans l'enseignement actuel. Ils sont dans la ligne des idées-forces que nous venons de citer. Cependant, certains sont peut-être des défauts de jeunesse, non des conséquences obligées.

a) *Niveau élevé et caractère abstrait des programmes*

Les programmes (français) sont de niveau élevé et plus abstraits que les anciens. Ceci paraît bien une conséquence de la conception des programmes en fonction des besoins des échelons supérieurs.

b) *Influence sur l'ordre de présentation*

Les structures induisent dans l'enseignement un ordre de présentation qui n'est pas toujours raisonnable.

Par exemple, les présentations adoptées pour les espaces métriques réduisent d'une manière exagérée la place accordée à la notion d'angle.

Lorsque l'on pense à tous les astres, roues et aiguilles qui tournent autour de nous, une telle position est-elle défendable ?

c) *Distinctions subtiles*

"Mathématique Moderne" introduit des distinctions souvent génératrices de progrès. Par exemple, on distingue :

— l'application f de E vers F ;

— l'effet de cette application sur un élément a de E ;
ou encore : un élément e ;

— l'ensemble formé de ce seul élément e.

Mais une distinction utile dans un certain contexte peut être parfaitement inutile dans un autre. Le mathématicien possède, à mon avis, le pouvoir de distinguer mais aussi celui de ne pas distinguer. Alors que Bourbaki fait jouer un grand rôle à l'abus de langage, "Mathématique Moderne" s'en abstient systématiquement. Voici un exemple où ce serait pourtant plus simple et sans inconvénient.

— Est-il vraiment utile, dans un problème de géométrie, de distinguer

- le point,
- l'ensemble formé d'un seul point,

ce qui amène à écrire

$$a \in D \quad \text{et} \quad D \subset P$$

d) *Distorsion des notions*

La réduction des diverses notions aux structures-mères conduit à donner à beaucoup d'entre elles un habillage qui surprend et qui crée dans l'esprit de l'auditeur des images incongrues. Soit, par exemple, la définition de la droite affine.

C'est "une famille de bijections entre D (la droite) et R (l'ensemble des réels) telle que toute bijection g de la famille s'écrive au moyen de l'une d'entre elles f

$$g = af + b \qquad a \text{ et } b \text{ réels"}$$

Affine étant un adjectif, j'attendais comme définition : "la droite affine est une droite qui ..." (Il serait facile de mettre la définition sous cette forme).

Contacts de la mathématique ainsi conçue avec la réalité

Les contacts de la mathématique ainsi conçue avec la réalité sont difficiles.

a) *Au niveau des jeunes enfants*

Le dégagement des structures logiques et ensemblistes au niveau élémentaire, à partir de faits de la vie courante, se heurte à des difficultés dues essentiellement à des conflits entre champs sémantiques auxquels les mathématiciens, habitués à travailler dans un domaine cohérent, sont peu préparés. Leur réaction, dans un tel cas, est de se retirer pour préserver la pureté de leur science.

b) *Au niveau des utilisateurs*

Le langage introduit permet souvent de modéliser une situation. Il est, cependant, peu fait pour les situations dynamiques.

La distorsion imposée aux notions, et les habitudes prises, rendent difficiles le retour du modèle à la situation.

— Les distinctions établies sont parfois trop fines. Le mathématicien se fait alors traiter de coupeur de cheveux en quatre. Mais, parfois, elles ne le sont pas assez. En voici un exemple : il s'agit de mettre des fleurs dans des vases. C'est une application, dira le mathématicien ; il y a au moins deux choses différentes, dira le fleuriste :

— l'action de mettre les fleurs dans les vases (elle peut être longue, coûteuse, fatigante) ;

— le résultat de cette action : les vases fleuris (ce peut être réussi, équilibré, disgracieux).

Les adjectifs montrent bien qu'il s'agit de choses différentes.

Le contexte actuel

Après ce survol de "Mathématique Moderne", reprenons la figure 1.

Depuis 1960 il s'est produit deux événements importants :

— la contestation générale de l'enseignement ;

— la prise de conscience par le grand public (mais pas encore par les mathématiciens) de l'importance de l'informatique.

Sur le premier point "Mathématique Moderne" peut se féliciter d'avoir commencé sa réforme avant les autres disciplines. Mais cette réforme, limitée à une seule discipline et faite en fonction des besoins de la "science mathématique" et non en fonction de ceux des élèves, risque d'être remise en cause par une refonte générale de l'enseignement, amenant en particulier des fusions entre disciplines.

Sur le second point, après un début difficile aussi bien sur le plan industriel que sur le plan universitaire, l'informatique a conquis droit de cité. En utilisant une image, disons que le mouvement bourbakiste avait tracé de grandes avenues dans des quartiers vétustes et les avait prolongées dans des banlieues en cours d'urbanisation ; les aspects théoriques de l'informatique peuvent être comparés à la création de villes nouvelles dans des sites où il n'y avait rien autrefois.

Bien qu'au niveau du second degré l'informatique se présente essentiellement comme interdisciplinaire, la mathématique sera naturellement une des disciplines les plus marquées par l'arrivée de l'ère informatique.

Position de "Mathématique Moderne" par rapport à ce nouveau contexte

Malgré quelques slogans affirmant que "mathématique moderne" débouche directement sur l'utilisation réelle des mathématiques, il est visible que ni ses principes ni ses réalisations ne se portent de ce côté.

Comme tout mouvement fortement engagé dans une lutte, "Mathématique Moderne" est trop marqué par ses prises de position et trop occupé par ses luttes contre ses opposants, pour être à même de mener à bien la réforme informatique. Celle-ci ne peut se faire qu'en le dépassant.

Nous nous proposons, maintenant, de dégager les grandes lignes de ce dépassement.

Grandes lignes d'un dépassement possible

Il nous semble que ces lignes sont les suivantes :

— Organisation de l'enseignement en fonction des besoins des divers paliers prévus.

— Liaisons organisées avec les autres disciplines et ouverture sur la vie.

Au point de vue contenu, il est intéressant de préciser le sens de quelques mots-clés encore peu usuels :

Modèle — Langage — Algorithme —
Mathématique finie — approximation —
Technique —

Nous allons les évoquer rapidement.

Modèle —

Les mathématiques sont une création de l'esprit mais pas d'un esprit désincarné. Les notions ne sont pas parachutées mais dégagées lentement de l'intuition sensible au niveau de l'enseignement. Ceci exige un travail long, difficile, et qu'il ne faut surtout pas mépriser.

Avec des élèves plus avancés, la notion de modèle permet d'éclairer sous un jour nouveau des rapports qui, sans cela, paraissent bien flous.

Langage —

En tant que construction de l'esprit, la mathématique reste incommunicable. En fait, elle devient communicable en prenant forme de langage et, spécialement, de langage de formules logiques, algébriques, etc ... Celles-ci sont à leur tour susceptibles d'une étude mathématique. Le développement des langages de programmation a attiré l'attention sur l'étude de ces nouveaux êtres que les mathématiques classiques ou modernes utilisent sans y prêter attention.

Algorithme—

Dans ses utilisations pratiques, la mathématique se propose non de démontrer, mais de construire ou de produire.

Si l'on étudie cette situation on tombe sur des enchaînements d'actions élémentaires dont chacune détermine la suivante. Il y a là tout un champ nouveau.

Mathématique finie -

La manipulation réelle d'objets matériels ou de concepts ne peut porter que sur un nombre fini de ceux-ci et sur un nombre fini d'opérations successives.

L'informatique nous amène ainsi à mettre en bonne place une mathématique beaucoup trop négligée jusqu'ici : la mathématique finie.

Approximation —

Les êtres de nature infinie (réel, fonction) n'en gardent pas moins leur domaine propre. Mais leur manipulation effective est en général impossible. On les remplace par des êtres appartenant à un ensemble moins riche que l'on saura manipuler, les seconds étant "voisins" des premiers.

On considère trop souvent les méthodes approchées comme des appauvrissements des méthodes exactes. En fait, lorsque l'on y regarde d'un peu près, en particulier dans l'optique de la théorie des modèles, on s'aperçoit que les approximations correspondent en réalité à des modèles beaucoup plus évolués, et beaucoup plus près de la situation à étudier que les résultats rigoureux (mais malheureusement inaccessibles).

Technique —

Enfin, ces mathématiques beaucoup plus engagées dans la résolution de problèmes concrets mettent en pleine lumière la notion de technique.

Cette notion est susceptible de remettre à leur vraie place certains efforts demandés sur des points précis, par exemple l'apprentissage des tables en base dix.

Par ailleurs, elle est susceptible de favoriser la compréhension, par les jeunes, de la nature des tâches qui constituent la majorité des professions et, par là, de diminuer leur appréhension relative à leur entrée dans la vie active.

Programmes nouveaux

Dans l'optique précédente, il semble que l'on peut proposer les grandes lignes suivantes pour le déroulement de la formation mathématique :

6 — 10 ans

Connaissance algorithmique d'êtres ensemblistes logiques algébriques.

Manipulation réelle de formes (connaissance sensible de l'espace).

Expression en langage enfantin.

10 — 15 ans

Présentation des notions ensemblistes logiques algébriques.

Algorithmes et Mathématique finie.

Dégagement d'un modèle mathématique du continu et de la géométrie.

Manipulation concrète d'approximations.

Apprentissage de l'expression mathématique.

15 — 19 ans

La mathématique du continu

Analyse

Géométrie

Maîtrise du langage et de la méthode mathématique

(Modélisation, axiomatisation).