Bulletin de l'APMEP n°290 - Septembre 1973

2

ÉCHANGES

Essai de critique constructive des bases de l'enseignement des mathématiques (1)

par H. GACHET (Grenoble)

INTRODUCTION

Dans la modernisation de l'enseignement des mathématiques certaines façons de faire prennent le pas sur les autres. Plusieurs de ces nouvelles habitudes, concernant les bases mêmes, me paraissent critiquables et assez faciles à améliorer.

Cet essai ne cherche pas à tout bouleverser mais à mieux adapter la forme au fond.

Cependant une unité dans l'enseignement est souhaitable et je pense qu'un changement sur les fondements fait par un professeur isolé peut avoir plus d'inconvénients que d'avantages.

Nous allons envisager les notions de définition, de relation et d'application.

DEFINITIONS

Voici divers types de formulation qui ne me satisfont pas du tout.

I. FORMULATION AVEC "SI"

du type : *un ... est un ... si ...*

Exemple : Un triangle est isocèle s'il a deux côtés égaux (deux au moins).

---

(1) Article rédigé en 1971.

Ce qui me gêne le plus dans cette définition, c'est la confusion entre *implication* et *équivalence logique*. Cette formulation affirme seulement que tout triangle qui a deux côtés égaux est isocèle, alors que l'auteur de cet énoncé pense habituellement qu'il vient de convenir que tout triangle isocèle a deux côtés égaux.

Si un manuel ou un professeur se permet cela, il devra s'attendre à cette confusion chez les élèves et non seulement dans les définitions ; pourquoi l'accepter là et la refuser ailleurs ?

On voit même que la confusion entre une *implication* et sa *réciproque* découle naturellement du fait de les confondre toutes les deux à l'équivalence.

Remarques :

un ... est un ... évoque une *implication* ;

les ... sont des ... évoque aussi une *implication* ;

les ... sont les ... évoque une *équivalence logique*.

Exemples : - un homme ivre est un homme dangereux ;

- les chiens sont des mammifères ;
- les Parisiens sont les habitants de Paris.

De toute façon, le pluriel dans une définition me paraît préférable quand il peut y avoir plusieurs éléments vérifiant cette définition (et même tant que l'on n'a pas démontré l'unicité).

II. FORMULATION du TYPE :

... est défini par la donnée de : ...

Exemple : Une relation de E vers F est déterminée par une partie de $E \times F$.

En simplifiant un peu, je pense qu'une définition doit être un *critère* permettant de voir si "un élément" convient ou non, et par suite ce type de formulation est incorrect. Dans l'exemple précédent, $E \times F$ permet de définir bien de choses, $(E \times F)^2$ par exemple.

Que penserait-on de la définition suivante de triangle équilatéral en géométrie plane ?
Définition : un triangle équilatéral est défini par la donnée d'un bipoint (le centre et un sommet).

Voici un cas précis qui me semble se rattacher à ce type de définition : dans un cours où l'on distingue chaque proposition de sa valeur logique (ce qui revient à la possibilité pour deux propositions d'être vraies tout en étant distinctes) et où l'on désire que $A \Rightarrow B$ soit une proposition, définir l'implication par sa table de vérité est une formulation du type II.

Ce que je viens de dire pour l'implication s'applique aux autres connecteurs logiques : ou, et, etc ...

FORMES CONSEILLÉES :

Il est assez facile de modifier les formulations du type I de façon à échapper aux critiques précédentes.

1) Utilisation de "*on appelle*".

Exemple : On appelle triangles isocèles les triangles qui ont ...

Ce type de formulation est clair et commode pour les noms et les adjectifs mais il convient mal pour les verbes et les phrases complètes.

2) Utilisation de "*signifie*".

Exemples :
- Triangle isocèle signifie triangle qui a ...
- a appartient à b signifie ... (ou encore l'élément a appartient à l'ensemble b signifie ...)
- a divise b signifie ...
- M divise (A,B) dans le rapport k signifie ...

Ce genre de formulation convient même pour les verbes et les phrases complètes comme on le voit sur les trois derniers exemples.

Ce type de formulation réclame une annonce du genre "définition : ...", ou encore : "par définition ...".

Exemple : Par définition, a divise b signifie ...

Je préfère ces deux types de formulation au suivant :

3) Utilisation de "*si et seulement si*".

Exemple : Un triangle est isocèle si et seulement si ...

Ceci me paraît lourd, abstrait pour un débutant et même discutable.

Les définitions du type II cachent en général une difficulté de fond. Pour les rendre correctes il ne s'agit pas de modifier la forme mais d'imaginer, de choisir une définition, parfois imparfaite quand il s'agit d'une notion de base (notion première) telle que élément, ensemble, proposition, variable, champ.

Nous verrons plus loin un essai pour la notion de relation.

Envisageons le cas des connecteurs logiques portant sur les propositions ; pour la conjonction et la négation on peut référer au sens usuel. Pour la disjonction on peut définir "A ou B" comme étant "l'une au moins des propositions A, B est vraie".

On peut définir "A implique B" comme étant "il est faux que A et non B", c'est-à-dire : Non (A et Non B). On peut lui préférer "(Non A) ou B" plus simple en apparence, mais peut-être plus abstrait.

Les tables de vérité de ces connecteurs résultent de ces définitions, elles ne peuvent pas les remplacer.

RELATIONS

Mes critiques concernant les habitudes pour la notion de relation sont les suivantes :

1) L'imprécision de la définition par une partie de $E \times F$ déjà expliquée plus haut (le fait qu'une partie de $E \times F$ ne précise ni E ni F confirme l'imprécision).

2) La priorité abusive donnée aux relations binaires.

3) La confusion entre les concepts logiques (relations) et les éléments.

Je vais indiquer sommairement comment j'envisage l'enseignement élémentaire concernant les relations, cela permettra de préciser les deux dernières critiques.

Les élèves seront, par des exemples simples, habitués à la notion de variable dans un champ (ou référentiel), c'est-à-dire à considérer des éléments et des propositions dépendant d'un élément du champ (ce champ sera le plus souvent un ensemble), ceci en utilisant une lettre ou un signe appelé variable.

Exemple : x étant variable dans **R**, on pourra considérer "$2x + 1$" ou "$3x > 4$".

Dans le premier cas, on pourra dire qu'il s'agit d'un élément dépendant de la variable x dans **R** ; dans le deuxième cas, on pourra dire qu'il s'agit d'une "proposition" dépendant de la variable x dans **R**.

Il est commode d'appeler *conditions* sur E les "propositions" dépendant (ou mieux pouvant dépendre) d'une variable dont le champ est E.

Les élèves seront habitués à manipuler sur des exemples des conditions d'une variable dont le champ est **N**, **Z**, **R**, l'espace géométrique (ensemble de points), la classe (ensemble d'élèves). Ils seront amenés à comprendre que la négation d'une condition est une condition, que la conjonction de deux conditions est une condition, de même pour la disjonction, l'implication, l'équivalence. Ensuite on fera apparaître la notion de quantification universelle, existentielle d'une condition (c'est une proposition).

On donnera des exemples de recherche des éléments du champ pour lesquels une condition devient une proposition vraie. Il est assez commode d'appeler ces éléments solutions de la condition, mais *solution* sert aussi pour indiquer la rédaction de la réponse à un problème, ce qui est un inconvénient.

Il est également commode d'employer les mots *résoudre*, *résolution* pour la recherche de l'ensemble des solutions (exclusivement lorsque le champ est un ensemble).

On pourra noter $C(x)$ une condition en x.

SIMPLIFICATION D'ÉCRITURE :

Le fait de préciser le champ des variables permet d'accepter $\forall\ x\ C(x)$ au lieu de $\forall\ x \in E\ C(x)$, d'accepter $\exists\ x\ C(x)$ au lieu de $\exists\ x \in E\ C(x)$ et d'accepter $\{x \mid C(x)\}$ au lieu de $\{x \in E \mid C(x)\}$.

Les conventions suivantes ont également pour but de simplifier l'écriture :

Convention 1

Celui qui formule une proposition, verbalement ou par écrit, affirme qu'elle est vraie, à moins que le contexte n'indique le contraire.

Exemples : "$2 < O$ ou $1 < 3$" affirme que la disjonction des propositions est exacte, mais la présence de "ou" indique clairement que "$2 < 0$" n'est pas affirmée bien qu'elle soit formulée.

"$1 < 0$ est une proposition" n'affirme pas que $1 < 0$.

Convention 2

Celui qui formule une condition affirme qu'elle est exacte pour tout choix de la variable dans son champ, à moins que le contexte n'indique le contraire.

Dans les exemples suivants, x est une variable dont le champ est $\mathbb{R}$.

Exemples : "$x^2 \geqslant 0$"

"$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$"

"Résoudre $2x + 1 = 0$" n'assure pas $\forall x \ 2x + 1 = 0$.

"Considérons l'inéquation $x^2 > 1$" n'assure pas $\forall x \ x^2 > 1$.

"$x > 0$ ou $x < 1$" n'assure pas $\forall x \ x > 0$.

"$x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$" n'assure pas $\forall x \ x = 0$.

On voit par ces deux derniers exemples que la convention 2 permet de sous-entendre une quantification universelle portant sur *tout* un énoncé, mais qu'il ne faut pas sous-entendre une telle quantification seulement sur une *partie* d'un énoncé.

Inversement "Non ($x < 0$ ou $x > 1$) $\Leftrightarrow$ ($x \geqslant 0$ ou $x \leqslant 1$)" est bien exact quel que soit le réel x, mais il ne faut pas confondre cet énoncé avec :

"Non ($\forall x$ ($x < 0$ ou $x > 1$)) $\Leftrightarrow$ ($x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$)" qui n'est pas toujours vrai. Il ne faut pas non plus confondre avec : "Non ($\forall x$ ($x < 0$ ou $x > 1$)) $\Leftrightarrow \forall x$ ($x \geqslant 0$ et $x \leqslant 1$)" qui est faux.

Remarquons cependant que l'énoncé "$x^2 \geqslant 0$ et $x + 1 > x$" assure que $\forall x$ ($x^2 \geqslant 0$ et $x + 1 > x$); ceci assure également que $\forall x \ x^2 \geqslant 0$ et que $\forall x \ x + 1 > x$; cette remarque s'applique à toute conjonction.

Convention 3

Il est commode d'accepter la notation $a \Rightarrow b \Rightarrow c$ pour indiquer ($a \Rightarrow b$) et ($b \Rightarrow c$), a, b, c désignant des propositions ou des conditions ; ceci interdit d'abréger ($a \Rightarrow b$) $\Rightarrow c$ de la même façon. Il est commode d'accepter de façon analogue $a \Leftrightarrow b \Leftrightarrow c$.

Exemple :

$$(2x+4)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2x + 4 = 0 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} x = -2 \\ \text{ou} \\ x = 1 \end{array} \right.$$

Dans cet exemple, les conventions 2 et 3 s'appliquent et simplifient considérablement la rédaction.

Si on refuse les conventions précédentes dans un cours ou un manuel, on risque soit de les utiliser sans s'en rendre compte, soit d'être conduit à introduire des notations et des définitions du genre $\vdash$— (inférence), $\stackrel{?}{=}$, $\stackrel{?}{>}$, comme on en trouve dans certains manuels.

Certains voient des inconvénients à parler d'équivalence entre équations algébriques où les ordres de multiplicité de solutions ne sont pas les mêmes. Je ne pense pas que ces inconvénients soient importants ; il serait dommage de se priver de la notion fondamentale d'équivalence logique pour les équations. *Si on veut* un mot et une notation pour indiquer l'équivalence avec conservation des ordres de multiplicité, on pourra employer "équivalence forte" et le signe $\Leftarrow\!\!\!=\!\!\!\Rightarrow$ par exemple.

On est naturellement tenté, en s'inspirant de la notion d'application (discutée plus loin), de débarrasser la notion de condition de celle de variable libre dans le style $x \mapsto (x > 1)$ où x est variable dans $\mathbf{R}$. Il n'est pas certain aujourd'hui que cette façon de faire soit intéressante, tandis que la conservation des variables libres a fait ses preuves, par exemple dans les théories logiques du premier ordre. Il y a d'ailleurs lieu de distinguer les relations suivantes sur $\mathbf{R}$: $x > 1$, $y > 1$.

RELATIONS BINAIRES (à deux variables)

On peut reprendre ce qui précède avec deux variables, dans un même champ ou dans deux champs différents.

Exemples : x et y étant variables dans $\mathbf{R}$, $x < y$ est une relation binaire.

M étant variable dans l'espace géométrique et P étant un plan variable (dans l'ensemble des plans de l'espace), $M \in P$ est une relation binaire.

Cette notion de relation binaire en x, y de E vers F est voisine de la notion de condition dans le produit cartésien des champs, mais il vaut mieux ne pas confondre $x < y$ où les champs sont $\mathbf{R}$ avec $pj_1\, z < pj_2\, z$ où le champ de z est $\mathbf{R}^2$ (et où $pj_1\, z$ désigne le premier élément du couple z).

La notion classique de graphe d'une relation binaire est commode ; on aura intérêt à adopter les deux notations $\{(x,y) \mid R(x,y)\}$, $\{(x,y) \in E \times F \mid R(x,y)\}$ en se limitant au cas où les champs sont des ensembles, $R(x,y)$ désignant une relation sur E, F.

Avec un souci d'uniformité, on peut appeler résolution d'une relation la recherche de son graphe. Pourquoi n'appellerait-on pas graphe d'une condition l'ensemble de ses solutions ?

Remarque : Le graphe, à lui seul, ne caractérise même pas la relation à une équivalence près, il ne précise ni les champs ni les variables.

On pourra introduire :

$$\forall\,(x,y)\ R(x,y)\ ;\quad \forall\,(x,y) \in E \times F \qquad R(x,y)$$

$$\exists\,(x,y)\ R(x,y)\ ;\quad \exists\,(x,y) \in E \times F \qquad R(x,y)$$

Plus tard, on pourra introduire les notions de résolution partielle et de quantification partielle et les notations $\{ x \mid R(x,y) \}$ ensemble dépendant en général de y ; et $\forall\, x\ R(x,y)$ condition en y.

RELATIONS N-AIRES (à n variables)

On opérera de façon analogue puis on appellera relations :

les propositions (ou relations à 0 variable) ;
les conditions (ou relations à 1 variable) ;
les relations n-aires (ou relations à n variables).

Cette *unité* des relations est fondamentale ; la négation d'une relation est une relation, la conjonction de deux relations est une relation, la quantification d'une relation est une relation. Les connecteurs logiques, la quantification et la résolution ne peuvent porter que sur des relations.

On remarquera que toute proposition est une condition en x sur E quels que soient la variable x et son champ E.

Toute condition en x sur E est aussi une relation en x,y sur E,F quels que soient la variable y et le champ F.

Ce qui précède explique ma critique "priorité abusive aux relations binaires" ; je pense que leur étude devrait toujours être précédée d'une étude des conditions et que le langage et les notations devraient rendre naturel le passage des conditions aux relations binaires, puis ternaires ; il est loin d'en être ainsi.

En effet :

a) le langage "relation de E *vers* F" ne se prête pas à une généralisation ;

b) la représentation sagittale se généralise mal également (elle reste utile quand $E = F$) ;

c) la notation $x\ R\ y$ commode dans bien des cas particuliers ($x < y$, $x \in y$) se généralise mal.

Pour éviter d'insister sur ce qui distingue les relations binaires, je condamnerais le a) ; pour le b) je n'utiliserais pas de flèche lorsque les champs sont disjoints. Pour le c), je préférerais $R(x,y)$ sauf dans les cas particuliers classiques.

Je profite de l'occasion pour critiquer la forme classique "soit *la* relation $x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 1$" ; en effet, "$x\ R\ y \Leftrightarrow x + y = 1$" (où les champs sont précisés) ne définit pas la relation $x\ R\ y$ car, comme pour les propositions, il est bon de distinguer deux relations équivalentes. On aurait pu dire : "Soit $x\ R\ y$ *une* relation équivalente à $x + y = 1$", c'est correct ; mais j'emploierais plutôt : "Soit $R(x,y)$ la relation $x + y = 1$".

Je pense qu'actuellement on fait trop souvent en mathématique des confusions entre les articles définis et indéfinis, il est facile de corriger ce défaut, la clarté y gagne.

Exemples de fautes classiques :

— Trouver *la* condition nécessaire et suffisante pour que ...

— Trouver *l'*équation de la courbe ...

— Quel est *le* vecteur directeur de la droite ...

APPLICATIONS

Nous avons vu que les relations (concepts logiques) se présentent comme des concepts pouvant seuls "subir" une conjonction, une équivalence, etc. ; dans les théories les plus classiques les éléments (appelés aussi concepts substantifiques ou termes) peuvent seuls appartenir à un ensemble, être substitués à une variable, "subir" une égalité.

Il n'y a peut-être pas d'empêchement théorique à ce qu'un concept soit à la fois logique et substantifique (relation et élément) mais cela n'apparaît pas dans les théories classiques.

Dans les théories élémentaires, les concepts sont soit des relations, soit des éléments, mais non les deux à la fois ; je pense que cette position est bonne pour des débutants ; de toute façon, il importe de bien distinguer les deux types de concepts car ils ne seront pas traités de la même façon (ils ne subissent pas les mêmes opérations).

Si l'on considère maintenant les nouvelles habitudes concernant la notion d'application, on voit que ce concept est, par définition, une relation, mais il est traité comme un élément. On trouve l'égalité de deux fonctions, on ne trouve pas d'implication $(f \Rightarrow g)$, ni d'équivalence logique entre applications $(f \Leftrightarrow g)$, on ne parle jamais de la négation d'une application.

On ne voit jamais, f et g désignant deux applications de E dans F, $(f \Rightarrow g) \Leftrightarrow (f = g)$, ni $(f \Rightarrow g) \Leftrightarrow (f \Leftrightarrow g)$; cela choque et pourtant c'est très défendable avec la position actuelle. (1)

Il faut choisir : ou bien on définit application comme relation et on respecte ceci, ou bien on définit application de façon qu'une application soit exclusivement un élément (ce qui n'empêche pas $y = f(x)$ d'être une relation).

A mon avis, il n'y a pas à hésiter ; le premier choix bouleverserait toutes nos habitudes concernant l'emploi des applications et le langage en particulier. Le deuxième choix modifierait la définition, mais pour la suite, nous pourrions garder nos habitudes et éviter un bouleversement pénible.

Le concept classique d'application peut être défini comme triplet (E,F,A) où E et F sont des ensembles et où A est une partie de $E \times F$ telle que $\forall\ x \in E,\ \exists !\ y \in F,\ (x,y) \in A$, (éviter $(E,F,\mathfrak{R})$ où $\mathfrak{R}$ est une relation). Ainsi toute application serait un élément, cette façon de procéder est correcte, elle a l'avantage de permettre de montrer facilement que l'image est un ensemble.

---

(1) En accord avec la plupart des cours actuels :

Si $f \Rightarrow g$ alors

quel que soit l'élément x de E, soit y son transformé par f, (x,y) vérifie la relation f donc (x,y) vérifie la relation g et par suite y est le transformé de x par g ; tout élément de E a donc même transformé par f et par g donc $f = g$, donc :

$$(f \Rightarrow g) \Rightarrow (f = g)$$

Le décrochage à droite utilisé ci-dessus est un procédé, souvent commode (surtout au tableau noir), pour indiquer la portée d'une hypothèse (ici de $f \Rightarrow g$), le retour à l'alignement de l'hypothèse indique que celle-ci est abandonnée. (Ceci est lié au Théorème de Déduction).

La réciproque de l'implication précédente est à peu près évidente, donnons-en cependant une démonstration pour montrer l'emploi de décrochages superposés.

Si $f = g$

Si (x,y) vérifie f

y est le transformé de x par f, donc y est le transformé de x par g (puisque $f = g$) donc (x,y) vérifie g et par suite

$f \Rightarrow g$ il en résulte que

$$(f = g) \Rightarrow (f \Rightarrow g)$$

Il en résulte, en tenant compte de la démonstration qui précède celle-ci, que $(f \Rightarrow g) \Leftrightarrow (f = g)$.

On pourrait montrer de façon analogue que $(f \Rightarrow g) \Leftrightarrow (f \Leftrightarrow g)$.

J'accepte donc une telle définition, mais ceci dit je me demande si l'on ne devrait pas envisager de renoncer à l'avantage ci-dessus pour avoir une notion plus simple, plus naturelle pour de jeunes esprits.

1ère suggestion :

Accepter la notion d'application comme notion première avec un sens intuitif du genre : association d'un élément à chaque élément d'un ensemble. La notion de couple et celle de n-uplet pouvant être déduite naturellement (au lieu de faire l'inverse).

Cet aspect de l'application s'accorde bien à la notion de valeur d'une application pour une valeur de la variable, à la notation $x \longmapsto 2x + 1$.

2ème suggestion :

Si l'on préfère déduire la notion d'application de celle de couple, on pourra appeler applications les ensembles A dont tous les éléments sont des couples et tels que si E désigne la première projection de A et F la deuxième projection, on ait :
$\forall x \in E, \ \exists ! \ y \in F, (x,y) \in A$, ceci après avoir défini les projections en admettant ou (à un niveau plus élevé) en démontrant que ce sont des ensembles.

Avec chacune des suggestions précédentes, on pourra définir l'ensemble de départ de l'application, son image. Pour retrouver certaines habitudes on pourra définir application *de* E, application *dans* F (dont l'image est incluse dans F) mais :

— il n'y a plus de distinction entre ensemble d'arrivée et image ;

— des trois notions : injection, surjection, bijection, seule la première demeure, on pourra définir application inverse d'une injection ;

— pour démontrer que deux applications f, g de E sont égales, il suffira de démontrer que $\forall x \in E \ f(x) = g(x)$, ce qui n'est pas suffisant avec la définition par le triplet (E,F,A) où il y a lieu de vérifier les égalités des ensembles d'arrivée ;

— pour déterminer une application d'un ensemble fini, il suffira d'un tableau ou symbole du genre $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & t \end{pmatrix}$ indiquant le transformé de chaque élément de l'ensemble de départ ;

— une notation du genre $x \in \mathbb{R} \longmapsto 2x + 1$ suffira à préciser une application ;

— à un niveau plus élevé, dans le cas d'un homomorphisme f du groupe G dans le groupe H, il est classique de décomposer f en trois applications :

1) l'homomorphisme canonique de G dans G/Ker f ;
2) un isomorphisme de G/Ker f dans f(G) ;
3) l'injection canonique de f(G) dans H.

Cette troisième application devient inutile avec les deux points de vue proposés.

Je crois qu'il est dommage de ne pas bénéficier de ces simplifications à tous les niveaux et surtout pour les jeunes enfants.

Ces suggestions concernent non seulement un changement de présentation mais un changement de la notion, de ses propriétés et par conséquent je ne pense pas qu'il soit bon qu'un professeur fasse isolément cette modification.

NOTATION POUR LES APPLICATIONS

Le nouvel usage $f : x \longmapsto 1 + \sin x$ (le style de la flèche pouvant être différent) me semble facile à améliorer en utilisant des idées générales.

En effet, passer de l'élément variable $1 + \sin x$ à l'application, a des analogies :

— avec le passage de la condition $C(x)$ à la proposition $\forall\ x\ \ C(x)$;
— avec le passage de la condition $C(x)$ à l'ensemble $\{x \mid C(x)\}$;
— avec le passage de $f(x)$ à $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Par exemple, les concepts obtenus ne sont pratiquement pas changés si l'on remplace la variable par une autre en accordant l'opération avec cette nouvelle variable; ainsi : $\forall x\ C(x) \Leftrightarrow \forall y\ C(y)$, $\{x \mid C(x)\} = \{y \mid C(y)\}$, $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(y)\,dy$.

Ceci conduit à noter l'application $x \longmapsto 1 + \sin x$, (ou de façon voisine), le groupement de signes $x \longmapsto$ étant analogue aux groupements $\forall x$, $\{x \mid \ \}$, $\int_0^1 \ dx$.

On appelle souvent mutificateurs ces groupements, la variable x étant dite muette dans $x \longmapsto (1 + \sin x)$, $\forall x\ C(x)$, etc ... (en fait, on parle plutôt d'occurrence muette).

Bien entendu, il serait maladroit de proscrire $x \in \mathbf{R} \longmapsto 1 + \sin x$; mais $1 \longmapsto \ldots$, $2 + 3x \longmapsto \ldots$ sont à proscrire ainsi que $\forall f(x) \ldots$, $\exists f(x) \ldots$

Ceci montre que la notation $f : x \longmapsto 1 + \sin x$ mélange deux idées : indiquer une application et lui donner un nom.

On a donc intérêt à préciser que $x \longmapsto 1 + \sin x$ (où x est une variable réelle) désigne l'application elle-même.

Si on veut l'appeler f, il s'agit d'autre chose que l'on sait bien faire. Par exemple, appelons f l'application de variable réelle $x \longmapsto 1 + \sin x$. Dans ce cas, on aura $f = x \longmapsto 1 + \sin x$ ou $f = (x \longmapsto 1 + \sin x)$ et non $f : x \longmapsto 1 + \sin x$.

CONCLUSION

Par son objet même cette rédaction se limite à des idées peu classiques ; elle risque donc d'être mal acceptée.

Il est d'ailleurs très possible que certaines affirmations soient critiquables, mais il ne s'agit pas d'un tout à accepter ou refuser en bloc. Si une partie seulement de cette étude peut être utile, je n'aurai pas perdu mon temps.

Je suis prêt à mon tour à recevoir vos critiques, j'en serais même heureux.