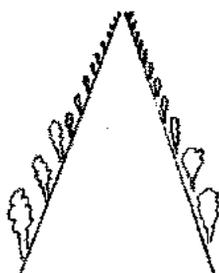


Introduction à la géométrie projective

par J.C. CARREGA (IREM de Lyon)

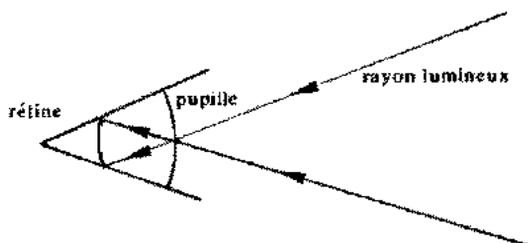
1 Origines de la géométrie projective



Bien que la notion d'espace affine constitue un bon modèle local de l'espace physique, ce modèle semble insuffisant pour rendre compte de notre *vision* des choses.

Ainsi deux droites parallèles peuvent être *vues* concourantes par certains observateurs.

Ceci est dû en partie au fait que notre oeil transforme le réel en images par "projection centrale", le centre de projection étant la pupille.



On peut donc dire que nous avons une *vue projective du monde*.

C'est l'utilisation de la représentation *en perspective* en peinture et gravure qui a conduit le mathématicien Desargues (1591-1661) à concevoir une nouvelle technique géométrique : la géométrie projective.

Pour bien montrer l'origine artistique de cette géométrie, signalons parmi les disciples de Desargues (autres que Pascal) : le graveur Bosse et Philippe de la Hire dont le père, le peintre Laurent de la Hire, était un ami personnel de Desargues.

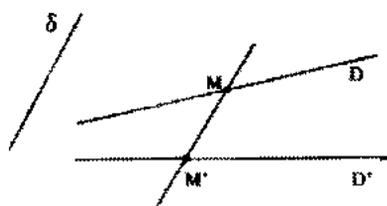
2 Inconvénients de la géométrie affine

Pour motiver notre étude, signalons quelques inconvénients de la géométrie affine.

- a) Lorsqu'interviennent dans un problème de géométrie plane deux droites distinctes D et D' , on ne peut pas toujours considérer leur point d'intersection. Il faut distinguer deux cas suivant que les droites D et D' sont parallèles ou concourantes ; ceci alourdit l'étude et masque parfois un résultat général.

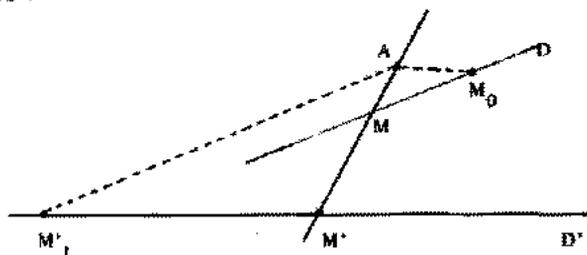
Pour uniformiser notre étude, on a parfois envie de dire : lorsque les droites D et D' sont parallèles, elles se coupent à l'infini.

- b) Si les droites D et D' n'ont pas δ pour direction, on peut



définir en géométrie plane la projection de D sur D' parallèlement à δ . Cette application est d'ailleurs une bijection de D sur D' .

Par contre :



Soit A un point n'appartenant pas aux droites distinctes D et D' . On appelle projection de centre A de D vers D' la fonction qui a un point M de D fait correspondre le point M' de D' tel que A, M, M' soient alignés. Cette fonction n'est pas une application car M_0 de D n'a pas d'image, de plus elle n'est pas surjective car M'_1 de D' n'est pas atteint.

Il semble donc que le plan affine ne soit pas un terrain convenable pour l'étude des projections centrales ; pourtant on peut avoir envie de dire :

1 - L'image de M_0 est le point à l'infini de D' et M'_1 est l'image du point à l'infini de D .

2 - La projection parallèlement à δ est un cas particulier de la projection de centre A , lorsque A est le point à l'infini de δ .

- c) Soient D et D' deux droites affines munies de repères, et a, b, c, d des nombres réels (c ≠ 0). Soit f la fonction de D sur D' qui, à un point M de D d'abscisse x, fait correspondre le point M' de D' d'abscisse $x' = \frac{ax + b}{cx + d}$.

f n'est pas une application car le point M₀ de D d'abscisse $-\frac{d}{c}$ n'a pas d'image et f n'est pas surjective car le point M'₁ de D' d'abscisse $\frac{a}{c}$ n'est pas atteint.

On peut avoir envie de dire etc ...

- d) Soit A et B deux points distincts d'une droite affine D. Soit O le milieu du segment AB.

Tout point de D autre que O possède un conjugué harmonique par rapport à A et B. On a envie de dire que le conjugué de O est etc ...

3 Vers la construction d'un plan projectif

- a) Intuitivement un plan projectif est un plan affine complété par un certain nombre de points (qu'on pourra appeler points à l'infini) de façon que deux droites distinctes quelconques aient un point commun.

Essayons de faire une telle construction.

Soit P un plan affine. Intuitivement il faut ajouter à P autant de points qu'il y a de directions de droites dans P. Soit \mathcal{D} l'ensemble des directions de droites de P.

Si D est une droite de P, on notera α_D la direction de D.

Soit $\bar{P} = P \cup \mathcal{D}$. \bar{P} sera appelé plan projectif, les éléments de \mathcal{D} seront appelés points à l'infini de \bar{P} .

Qu'allons-nous appeler droite dans \bar{P} ?

Si D est une droite de P, $\bar{D} = D \cup \{\alpha_D\}$ sera par définition une droite de \bar{P} . Voyons si deux droites distinctes de \bar{P} ont un point commun (et un seul).

$$\bar{D} \neq \bar{D}' \Rightarrow \begin{cases} \alpha_D \neq \alpha_{D'} \Rightarrow D \text{ non parallèle à } D' \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow D \text{ et } D' \text{ ont un point commun (et un seul)} \\ \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \bar{D} \text{ et } \bar{D}' \text{ ont un point commun (et un seul)} \\ \text{ou} \\ (\alpha_D = \alpha_{D'} \text{ et } D \neq D') \Rightarrow \alpha_D \text{ est un point commun à } D \text{ et } D' \text{ et c'est le seul.} \end{cases}$$

Mais on aimerait conserver pour \bar{P} une propriété de P , à savoir que par deux points distincts passe une droite et une seule ; donc si $\alpha_D \neq \alpha_{D'}$, il faut qu'il existe une droite de \bar{P} qui passe par α_D et $\alpha_{D'}$. Pour cela on est amené à décréter que \mathcal{D} est aussi une droite de \bar{P} (on l'appelle droite à l'infini de \bar{P}).

En résumé, le plan projectif $\bar{P} = P \cup \mathcal{D}$ possède une droite particulière \mathcal{D} appelée droite à l'infini, toutes ses autres droites sont de la forme $\bar{D} = D \cup \{\alpha_D\}$, où D est une droite de P de direction α_D .

- b) Nous ne retiendrons pas la construction précédente comme une "bonne définition" du plan projectif car cette construction fait jouer à certains points (points à l'infini) et à une droite (droite à l'infini) des rôles particuliers.

Nous aimerions plutôt une définition d'un plan projectif \mathcal{F} ne privilégiant aucun point et aucune droite de \mathcal{F} , mais telle que toute droite de \mathcal{F} puisse éventuellement jouer le rôle de droite à l'infini ; c'est-à-dire : Quelle que soit la droite \mathcal{D} de \mathcal{F} , il existe un plan affine P tel que $\mathcal{F} = P \cup \mathcal{D}$.

Il existe plusieurs voies permettant de donner une définition acceptable d'un plan projectif. Notamment une méthode axiomatique et une méthode algébrique.

Méthode axiomatique : On introduit trois notions : plan, points, droites, liées par certaines relations ou axiomes.

\mathcal{F} est un ensemble appelé plan, les éléments de \mathcal{F} sont appelés points, certaines parties de \mathcal{F} sont appelées droites.

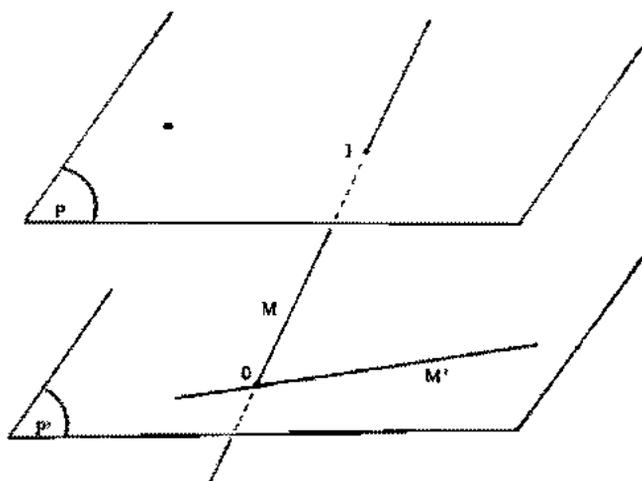
Il y a plusieurs choix possibles pour les axiomes et l'ordre dans lequel on les introduit, mais il semble naturel de commencer par :

Ax : Par deux points distincts passe une droite et une seule.

Ax : Deux droites distinctes ont un point commun.

Bien sûr il faudrait ajouter d'autres axiomes.

Méthode algébrique : Elle utilise la notion d'espace vectoriel. Pour montrer comment on y est conduit assez naturellement, considérons la figure suivante :



E étant un espace affine de dimension 3 sur un corps K , soit P un plan de E et O un point de E n'appartenant pas à P . On désigne par P' le plan de E parallèle à P passant par O .

Les droites de E passant par O peuvent être classées en deux catégories :

1 — Celles comme M qui ne sont pas contenues dans P' . Leur ensemble est en bijection avec P .

2 — Celles comme M' qui sont contenues dans P' . Leur ensemble est en bijection avec l'ensemble \mathcal{D} des directions des droites de P .

Donc l'ensemble des droites de E passant par O est en bijection avec l'ensemble $\bar{P} = P \cup \mathcal{D}$ introduit au 3 a).

Il semble donc que les droites de E passant par O vont nous permettre d'arriver à une définition du plan projectif.

Mais l'espace affine E pointé par O est muni canoniquement d'une structure d'espace vectoriel dont les droites vectorielles (sous-espace de dimension 1) sont les droites passant par O ; il suffira donc de s'intéresser à un espace vectoriel E de dimension 3 et à ses droites vectorielles.

4 Définition d'un plan projectif

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 sur le corps K . On appelle plan projectif issu de E l'ensemble des droites vectorielles de E .

On notera \mathcal{F}_E le plan projectif issu de E ; ses éléments seront appelés points projectifs (ou points, si aucune confusion n'est à craindre).

Soit $\pi : E - \{\vec{0}\} \rightarrow \mathcal{F}_E$ telle que $\pi(\vec{u})$ soit la droite vectorielle de E définie par u . π est surjective mais n'est pas injective car nous avons :

$$\pi(\vec{u}) = \pi(\vec{v}) \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés.}$$

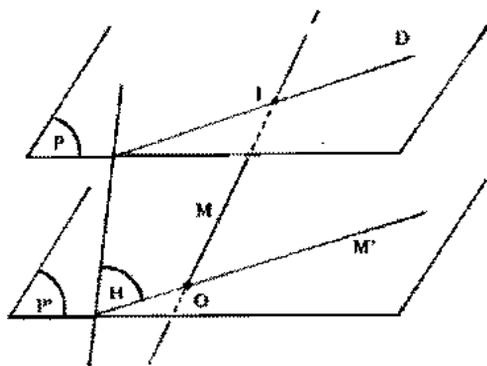
Soit $M \in \mathcal{F}_E$; tout $\vec{u} \in E - \{\vec{0}\}$ tel que $\pi(\vec{u}) = M$ est appelé *représentant homogène de M*. (En fait un représentant homogène de M n'est pas autre chose qu'un élément non nul de M .)

Qu'allons-nous appeler droite dans le plan projectif \mathcal{F}_E ?

En revenant sur la situation du 3 b), un plan H de E passant par O différent de P' coupe P suivant une droite D .

Les droites de H passant par O peuvent être classées en deux catégories :

- 1 - Celles comme M qui ne sont pas contenues dans P' . Leur ensemble est en bijection avec D .
- 2 - Puis la droite $M' = P' \cap H$ qui représente la direction α_D de D .



Donc l'ensemble des droites de H passant par O est en bijection avec l'ensemble $\bar{D} = D \cup \{\alpha_D\}$ introduit au 3 a).

Ceci peut nous suggérer la définition suivante :

Une droite (projective) de \mathcal{F}_E est l'ensemble des droites vectorielles de E contenues dans un plan vectoriel de E .

Les droites de \mathcal{F}_E sont donc de la forme $\pi(H - \{\vec{0}\})$ où H est un plan vectoriel de E et $H \rightarrow \pi(H - \{\vec{0}\})$ établit une bijection entre les plans vectoriels de E et les droites de \mathcal{F}_E . La droite $\pi(H - \{\vec{0}\})$ est dite issue du plan vectoriel H .

Il est facile alors de montrer :

- Par deux points distincts de \mathcal{F}_E passe une droite de \mathcal{F}_E et une seule.
- Deux droites distinctes de \mathcal{F}_E ont un point commun unique.

5 Liaison PLAN AFFINE - PLAN PROJECTIF

Intuitivement un plan projectif est un plan affine complété par un certain nombre de points appelés points à l'infini. Pourtant la définition de plan projectif adoptée au 4 est intrinsèque en ce sens qu'elle ne fait pas intervenir à priori de plan affine ; il s'ensuit que tous les points d'un plan projectif jouent le même rôle et qu'il n'y a pas à priori de points à l'infini.

C'est la liaison entre les notions de plan affine et de plan projectif qui conduit à la définition des points à l'infini. Cette liaison se résume par les deux résultats suivants :

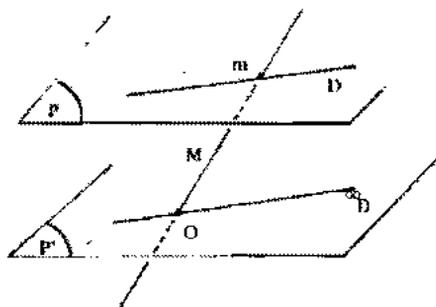
- 1) Tout plan affine peut être plongé dans un plan projectif. C'est-à-dire plus précisément : Si P est un plan affine, il existe un plan projectif \mathcal{F} et une droite \mathcal{D} de \mathcal{F} tels que $\mathcal{F} = P \cup \mathcal{D}$ et $P \cap \mathcal{D} = \emptyset$. \mathcal{D} est alors appelée droite à l'infini de \mathcal{F} et ses éléments sont appelés points à l'infini de \mathcal{F} .
- 2) Toute droite \mathcal{D} d'un plan projectif \mathcal{F} peut être choisie comme droite à l'infini de \mathcal{F} . C'est-à-dire plus précisément : Soit \mathcal{D} une droite quelconque d'un plan projectif \mathcal{F} , alors il existe un plan affine P tel que $\mathcal{F} = P \cup \mathcal{D}$ et $P \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Le premier résultat répond au problème dit de "la complétion projective d'un plan affine".

Le deuxième résultat répond au problème dit de "la spécialisation affine d'un plan projectif".

a) *Complétion projective d'un plan affine*

L'idée de la démonstration a été déjà exploitée dans 3 b).



Soit P un plan affine sur le corps K .

P peut être considéré comme un plan affine d'un espace affine E de dimension 3 sur K .

Soit O un point de E n'appartenant pas à P .

Soit P' le plan de E parallèle à P passant par O .

L'espace affine E pointé par O est muni d'une structure d'espace vectoriel sur K .

Soit \mathcal{P} le plan projectif issu de cet espace vectoriel E . Soit \mathcal{D} la droite de \mathcal{P} issue du plan vectoriel P' . En identifiant les points m de P aux points M de \mathcal{P} n'appartenant pas à \mathcal{D} , on obtient :

$$\mathcal{P} = P \cup \mathcal{D} \quad \text{et} \quad P \cap \mathcal{D} = \emptyset.$$

\mathcal{P} est appelé le complété projectif de P .

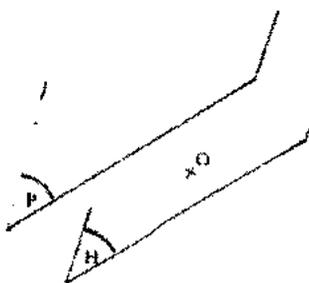
Si D est une droite de P , on note ∞_D la droite de P' passant par O parallèle à D (∞_D est un point de \mathcal{D}).

Si D et D' sont deux droites de P , nous avons : $D \parallel D' \iff \infty_D = \infty_{D'}$.

Grâce à l'identification entre P et $\mathcal{P} - \mathcal{D}$, les droites de \mathcal{P} sont toutes de la forme : $\bar{D} = D \cup \{\infty_D\}$ où D est une droite de P . ∞_D est appelé point à l'infini de \bar{D} ou encore point à l'infini dans la direction de D .

b) *Spécialisation affine d'un plan projectif*

C'est le problème réciproque du problème précédent.



Soit \mathcal{P} un plan projectif et \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} . On suppose \mathcal{P} issu d'un espace vectoriel E et \mathcal{D} issue d'un sous-espace vectoriel H de E . On note 0 le vecteur nul de E . E est muni canoniquement d'une structure d'espace affine.

Soit P un plan affine de E parallèle à H (distinct de H).

On est ramené à la situation du paragraphe précédent. Grâce à une identification, on obtient $\mathcal{F} = P \cup \mathcal{D}$ avec $P \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

On dit que P est une spécialisation affine de \mathcal{F} obtenue par le choix de la droite \mathcal{D} comme droite à l'infini.

Remarque : Les deux constructions précédentes ne sont pas entièrement satisfaisantes sur le plan formel car elles nécessitent des choix : dans la première, on considère P comme plongé dans un espace affine de dimension 3, il existe plusieurs façons d'effectuer ce plongement. Dans la seconde, on choisit un plan P parallèle à H , il y a plusieurs choix possibles. Il faudrait en toute rigueur donner des procédés canoniques de construction qui éviteraient de tels choix.

6 Application de la liaison AFFINE - PROJECTIF

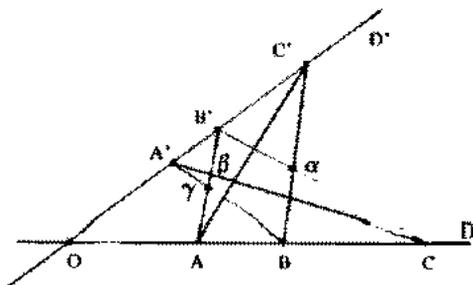
Les deux résultats précédents nous permettent de passer d'une façon très souple du plan affine au plan projectif et réciproquement : c'est-à-dire de ramener un problème affine à un problème projectif, ou un problème projectif à un problème affine.

La représentation par un dessin d'une situation du plan projectif s'effectuera comme pour une situation du plan affine, mais on veillera à mettre en évidence que deux droites distinctes sont toujours concourantes.

Exemple 1 : Dans le plan projectif \mathcal{F} , soient D et D' deux droites. On désigne par O leur point commun.

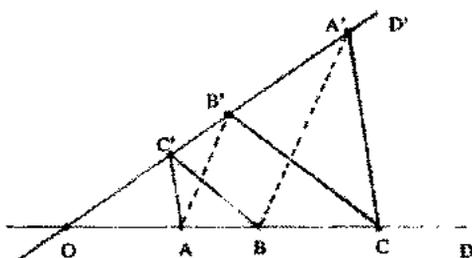
Soient A, B, C des points distincts de D , et A', B', C' des points distincts de D' . Soit α le point d'intersection des droites BC' et $B'C$, β le point d'intersection des droites AC' et $A'C$, γ le point d'intersection des droites AB' et $A'B$.

Alors α, β, γ sont alignés (théorème de Pappus).



Démonstration :

Soit D'' la droite $\alpha\beta$. Soit P la spécialisation affine de \mathcal{F} obtenue en choisissant D'' comme droite à l'infini. La trace dans P de la situation précédente se présente ainsi :



Par abus de notation, on appelle encore D et D' les traces de D et D' dans P . Dans P les droites BC' et CB' sont parallèles, ainsi que les droites AC' et $A'C$.

Le problème se ramène à démontrer que AB' et BA' sont parallèles.

Comme BC' et CB' sont parallèles, nous avons :

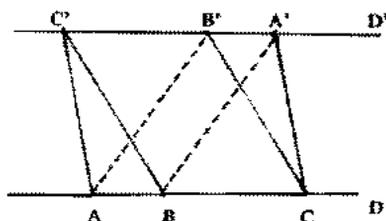
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OC'}}$$

Comme AC' et $A'C$ sont parallèles, nous avons :

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OC'}}$$

Il en résulte $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$, ce qui montre que AB' et BA' sont parallèles.

Nous avons implicitement supposé dans cette démonstration que $O \notin D''$. Dans le cas où $O \in D''$, la trace dans P de la figure projective devient :



Dans ce cas, les traces dans P de D et D' sont des droites parallèles.

(A, C, A', C') est un parallélogramme d'où

$$\overline{AC} = \overline{C'A'}$$

(B, C, B', C') est un parallélogramme d'où

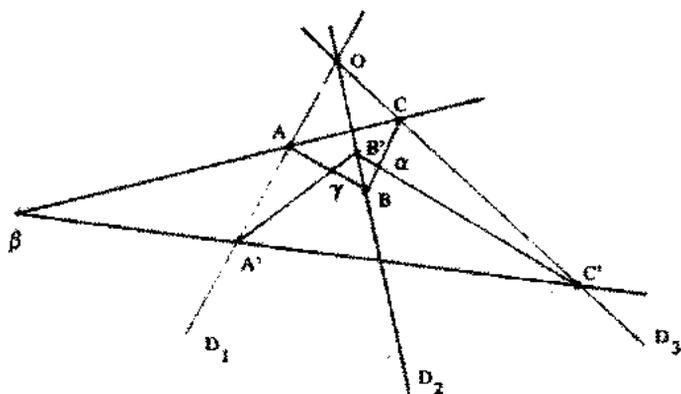
$$\overline{BC} = \overline{C'B'}$$

Il en résulte que : $\overline{AB} = \overline{B'A'}$, d'où

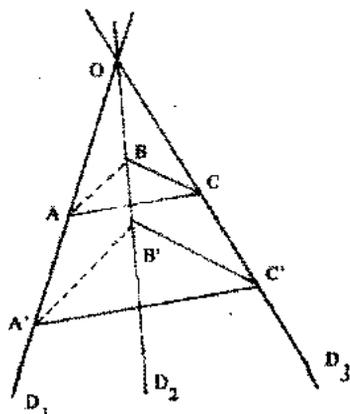
(A, B, A', B') est un parallélogramme, donc les droites AB' et BA' sont parallèles.

La démonstration précédente nous montre que deux situations affines différentes peuvent correspondre à une même situation projective.

Exemple 2 : Dans le plan projectif \mathcal{P} , soient D_1, D_2, D_3 trois droites concourantes, et soient A, A' deux points de D_1 ; B, B' deux points de D_2 ; C, C' deux points de D_3 . Soit α le point d'intersection des droites BC et $B'C'$, β le point d'intersection des droites AC et $A'C'$, γ le point d'intersection des droites AB et $A'B'$. Alors α, β, γ sont alignés.



Soit D_4 la droite $\alpha\beta$. Soit P la spécialisation affine de \mathcal{P} obtenue en choisissant D_4 comme droite à l'infini. La trace dans P de la situation précédente se présente ainsi :



Les droites affines AC et $A'C'$ sont parallèles ainsi que les droites affines BC et $B'C'$.

On est ramené à démontrer que les droites affines AB et $A'B'$ sont parallèles.

Démonstration :

L'homothétie de centre O qui transforme C en C' , transforme aussi B en B' (car BC est parallèle à $B'C'$), et transforme aussi A en A' (car AC est parallèle à $A'C'$), donc AB est parallèle à $A'B'$.

Etudiez le cas où O appartient à D_1 .

Terminologie : Dans un plan projectif, deux triangles sont dits *homologiques par rapport au point O* si leurs sommets sont respectivement situés sur trois droites concourantes en O . Dans notre exemple, les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homologiques par rapport à O point de concours des droites D_1 , D_2 et D_3 .

7 Dualité

\mathcal{F} étant un plan projectif, analysons les deux énoncés suivants :

- Par deux points distincts de \mathcal{F} passe une droite et une seule.
- Deux droites distinctes de \mathcal{F} se coupent en un point et un seul.

On voit que l'on obtient un énoncé à partir de l'autre en échangeant les mots "point", "droites" et les mots "passe", "se coupent".

En fait, une des propriétés remarquables d'un plan projectif est que les points et les droites jouent des rôles parfaitement symétriques.

Si \mathcal{F} est un plan projectif, on désigne par $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ l'ensemble des droites de \mathcal{F} . D'une façon précise, on a le résultat suivant :

Si \mathcal{F} est un plan projectif, il existe un autre plan projectif \mathcal{F}^* et une bijection

$$\varphi : \mathcal{F} \cup \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathcal{F}^* \cup \mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}$$

telle que :

$$1) \varphi(\mathcal{F}) = \mathcal{D}_{\mathcal{F}^*}$$

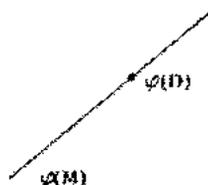
$$2) \varphi(\mathcal{D}_{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}^*$$

$$3) \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall D \in \mathcal{D}_{\mathcal{F}} \quad M \in D \implies \varphi(D) \in \varphi(M)$$

Dans \mathcal{F}



Dans \mathcal{F}^*

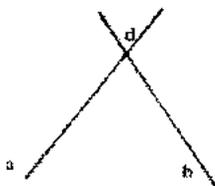
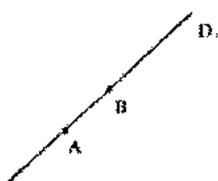


Nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat, mais signalons que si \mathcal{F} est le plan projectif issu de l'espace vectoriel E , alors \mathcal{F}^* est le plan projectif issu de l'espace vectoriel E^* dual de E . \mathcal{F}^* est appelé le plan projectif dual de \mathcal{F} . φ est appelée dualité.

Tout résultat dans \mathcal{F} ne faisant intervenir que les notions de points, de droites et d'appartenance donnera par dualité un résultat dans \mathcal{F}^* ; mais comme tous les plans projectifs ont les mêmes propriétés, nous obtiendrons en fait un nouveau résultat dans \mathcal{F} .

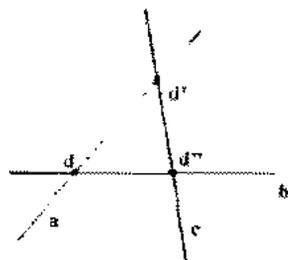
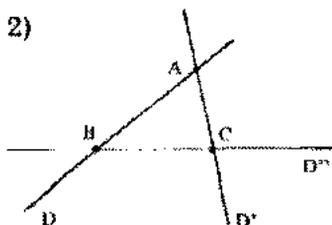
A titre d'exercices, transformons par dualité certaines situations de \mathcal{F} :

1)

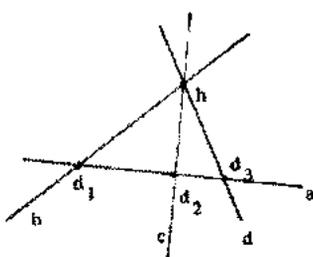
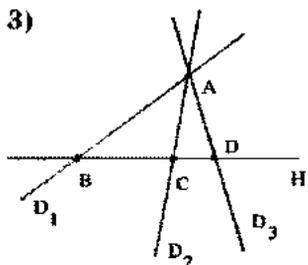


(les images par φ de lettres majuscules sont notées par les lettres minuscules correspondantes).

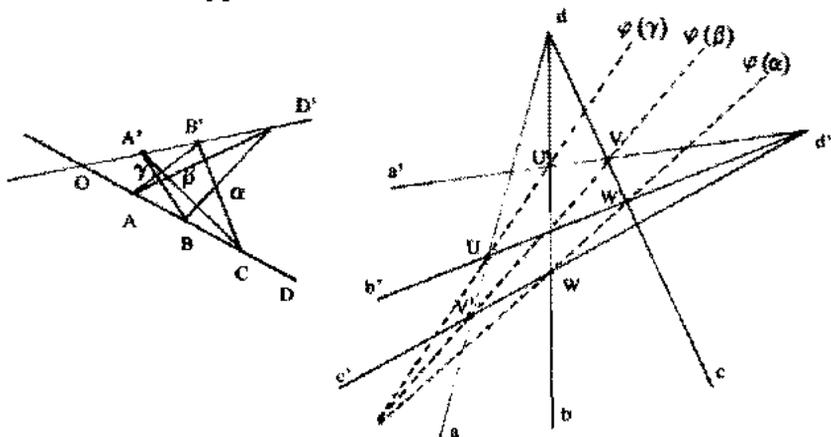
2)



3)



Voyons quel est le résultat qu'on obtient par dualité partir du théorème de Pappus.



$$\begin{array}{ll}
 U = \varphi(AB') & U' = \varphi(A'B) \\
 V = \varphi(A'C) & V' = \varphi(AC') \\
 W = \varphi(BC') & W' = \varphi(B'C)
 \end{array}$$

α, β, γ sont alignés $\Rightarrow \varphi(\alpha), \varphi(\beta), \varphi(\gamma)$ sont concourantes.

Le résultat peut s'énoncer ainsi : Si deux triangles UVW et $U'V'W'$ sont homologues par rapport à d et homologues par rapport à d' , alors ils sont homologues par rapport à un troisième point.

On pourra aussi à titre d'exercice dualiser le deuxième exemple du 6 .

8 Conclusion

Nous avons volontairement limité notre étude au cas du plan projectif, mais nous avons adopté des définitions qui se généralisent très bien pour l'étude générale des espaces projectifs.

Notre étude du plan projectif a été très incomplète puisqu'elle s'est limitée à deux aspects : liaison plan affine — plan projectif, et dualité. Chacun de ces deux aspects nous a permis de mettre en évidence des procédés de démonstration très économiques susceptibles de motiver une étude plus précise. Ce sera peut-être alors l'occasion de parler des coordonnées homogènes, des repères, des équations, du birapport, des faisceaux, du groupe projectif et des aspects topologiques.

1492 : DECOUVERTE DE L'AMERIQUE

1971 : DROIT A LA FORMATION PERMANENTE DES TRAVAILLEURS

Des tas d'or : 5 milliards de F en 1976 ...
Aussi le bon négoce arme-t-il ses galions ...
L'Education Nationale frète quelques blanches caravelles ...
Mais pour quoi faire ?

Les indigènes, notre école les connaît : ce sont ses malhabiles, ses indifférents, ses bloqués, ses inadaptés, les insoucieux du lendemain social, les déjà-préposés aux tâches "serviles" ...

Quelle provende ! Des esprits à évangéliser, par exemple par la Bonne Nouvelle de la Mathématique de nos temples, des comportements à mieux aligner sur les nôtres ...

Saurons-nous voir les choses autrement qu'en missionnaires dispensant vérité et salut ?

Aller à la rencontre des personnes, de leur travail, de leur métier, faire éclater programmes, progressions et disciplines ? Ecouter et nous remettre en cause jusque dans la formation initiale de nos écoles ? Aider les esprits à se rendre plus libres, moins assujettis les comportements, plus solidaires les travailleurs ?

Si c'est oui, alors que l'Education Nationale se lance à fond dans cette aventure, qu'elle en chasse les marchands : cette Amérique sera sa Renaissance ...

Tout ne sera pas facile : Service des maîtres, indépendance des établissements sont à préserver.

De là aussi la nécessité de définir clairement nos objectifs et notre action.

Henri BAREIL

30 Juin 1973