Élections et mathématique

par Mlle MONSARRAT
(Lycée international, Saint-Germain-en-Laye)

Il ne faut pas confondre les deux préceptes suivants :

A L'enseignement doit jaillir de la vie afin d'améliorer celle-ci.
B La vie dois jaillir de l'enseignement afin d'améliorer celui-ci.

A est un problème humain, avec toutes ses implications sociales et politiques.
B est un problème borné aux objectifs d'une corporation, voire de spécialistes.

N'appliquer que B , c'est renforcer la sclérose et la ségrégation des disciplines traditionnelles.

Les fiches suivantes, rédigées par Mlle Monsarrat, sont une tentative d'application de A .

La première est du cru local et la seconde est inspirée de "Cahiers Mathématiques 1" (Guilbaud, Barbut, Rosenstiehl, Éditeur Gauthier-Villars).

Marcel Dumont

Fiche 1

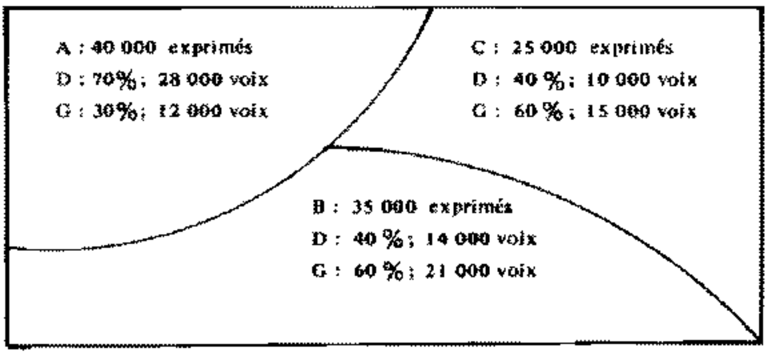
A PROPOS DE DECOUPAGE ELECTORAL

Systèmes linéaires

Au cours d'élections législatives, deux partis que nous désignerons par les lettres D et G se partagent les sièges de l'Assemblée Nationale de Papidolie.

Le pays est découpé en circonscriptions, un député est élu par circonscription à la majorité relative des voix.

Voici la répartition des voix dans trois circonscriptions A,B,C qui inquiètent les Autorités Gouvernementales.



Cette région possède donc : 1 député du parti D et 2 députés du parti G.

Le Ministre de l'Intérieur, trouvant son parti (D) insuffisamment représenté dans ce coin de Papidolie, décide de modifier la disposition des trois circonscriptions, de façon à ce qu'aux prochaines élections son parti obtienne tous les sièges.

Il demande à ses subordonnés d'étudier ce problème en tenant compte des données suivantes :

1 — dans chaque circonscription, le pourcentage obtenu par les deux partis est le même partout, quelle que soit la "sous-circonscription" choisie ;

2 — A,B,C seront chacune divisées en trois parties : A_1, A_2, A_3, B_1, ..., C_3. On appellera a_1, a_2, a_3, ..., c_3 le nombre de votes exprimés dans chacune de ces parties ;

3 — chacune des trois nouvelles circonscriptions sera formée en regroupant trois de ces parties : (A_1, B_1, C_1) ; (A_2, B_2, C_2) ; (A_3, B_3, C_3).

Les employés du Ministère chargés de cette affaire sont donc amenés à résoudre un système d'équations et d'inéquations.

Par exemple : pour que dans la circonscription (A_1, B_1, C_1), D ait la majorité, il faut que :

$$0{,}7\,a_1 + 0{,}4\,b_1 + 0{,}4\,c_1 > 0{,}3\,a_1 + 0{,}6\,b_1 + 0{,}6\,c_1$$

c'est-à-dire :

$$0{,}4\,a_1 - 0{,}2\,b_1 - 0{,}2\,c_1 > 0.$$

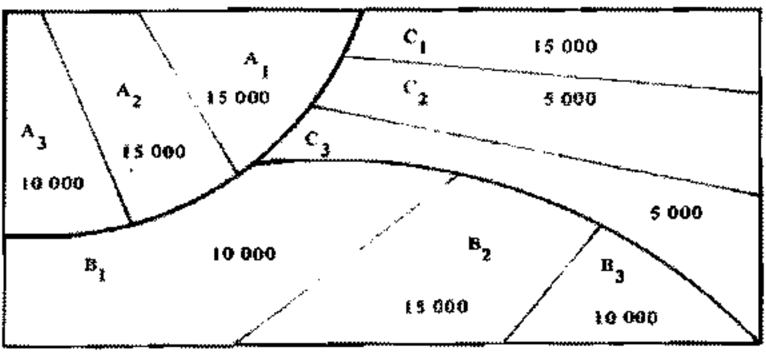
Quelles sont les deux autres inéquations qui doivent être vérifiées ?

D'autre part :

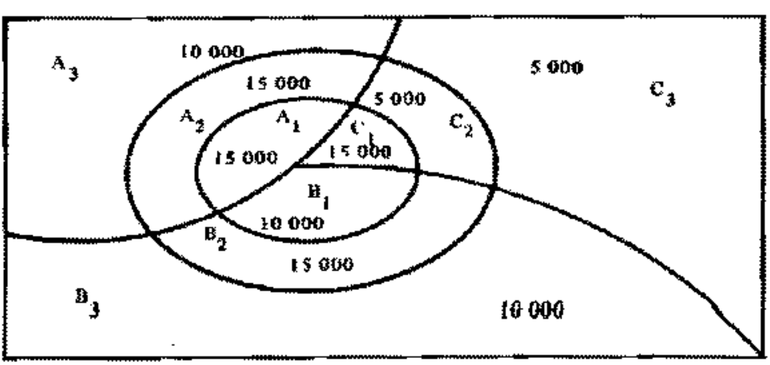
$$a_1 + a_2 + a_3 = 40\,000$$

Ecrire les deux autres équations relatives à B et C.

Un employé qui ignorait les méthodes appropriées mais qui n'est pas dépourvu de bon sens trouve une solution au problème qui est la suivante :



Géographiquement, cette répartition ne peut pas se présenter comme sur le dessin ci-dessus ; alors il propose le schéma suivant :



1° Trouver d'autres solutions, éloignées de celles proposées par l'employé.

2° Existe-t-il des solutions dans lesquelles B ou C est partagé seulement en deux ? A peut-il être partagé seulement en deux ?

3° Trouver d'autres dispositions topographiques des circonscriptions.

4° Le Premier Ministre, amateur d'égalité, décide que les nouvelles circonscriptions doivent posséder le même nombre (à 1 000 près) de voix.

Quelles sont les nouvelles équations que cela impose ?

Donner quelques solutions.

5° Généraliser à 4, 5, 6, ... circonscriptions et à 2, 3, 4, ... parties.

6° Ce problème peut-il être traité sur un miniordinateur ?

Fiche 2

Interprétations diverses d'un vote

Les 706 élèves du second cycle d'un lycée doivent élire leur représentant au conseil d'administration du lycée. Voici comment ils opèrent :

Quatre candidats se présentent : a,b,c,d ; sur chaque bulletin de vote, les noms des quatre candidats doivent être écrits par ordre de préférence.

Combien peut-on obtenir de bulletins différents ?

Les résultats obtenus sont les suivants :

acdb	238
badc	85
dcab	68
dabc	255
bdca	18
cdba	7
cbad	9
adcb	8
adbc	12
bacd	6

Après le dépouillement, les responsables du vote s'aperçoivent que plusieurs méthodes de choix peuvent être adoptées.

A — *METHODES PORTANT SUR CHAQUE CANDIDAT.*

1e méthode

On choisit comme représentant le premier de la liste majoritaire (c'est-à-dire la liste qui a obtenu le plus de voix).

Quel est le représentant par cette méthode ?

2e méthode

On note le nombre de fois que chaque candidat apparaît en tête de liste. On choisit comme représentant celui qui apparaît le plus souvent.

Qui est choisi pour représentant par cette méthode ?

3e méthode

On attribue un coefficient à chacune des quatre places que peut occuper un nom. Par exemple : 4 pour la première place ; 3 pour la deuxième ; 2 pour la troisième ; 1 pour la quatrième.

Chaque candidat obtient pour nombre de points la somme des produits calculés en multipliant le nombre de voix obtenues par chaque liste par le coefficient affecté à la place qu'occupe le candidat de cette liste.

Le candidat "a" obtient ainsi :

$(238 + 8 + 12) \times 4$	(listes où il apparaît en tête)
$+ (85 + 255 + 6) \times 3$	(listes où il apparaît en deuxième position)
$+ (68 + 9) \times 2$	(listes où il apparaît en troisième position)
$+ (18 + 7) \times 1$	(listes où il apparaît en quatrième position)

2 249 points

On élit comme représentant celui qui a le plus de points. Quel est-il ?

Essayer de choisir les coefficients de façon que ce soit "c" qui soit élu.

Est-ce possible ?

Est-il possible d'élire "d" ?

B — *METHODE UTILISANT UNE RELATION BINAIRE*

Il est possible d'utiliser aussi une autre méthode, utilisant une relation binaire appelée "*relation de préférence*".

Ecrire tous les couples possibles de candidats.

Pour chaque couple, tel que (a,b), compter combien de fois a est préféré à b, c'est-à-dire combien de fois a est placé avant b.

Exemple : 238 électeurs ont voté pour la liste acdb, donc "a" *a été préféré à* "b" 238 fois ;

par contre, 85 électeurs ont voté pour la liste badc, donc b est ici préféré à "a" 85 fois ;

idem pour les autres listes.

Faire ainsi la statistique pour tous les couples opposés tels que (a,b) et (b,a).

On en déduit la relation de préférence suivante :
"x *est préféré à y si le couple* (x,y) *obtient plus de voix que le couple* (y,x)" (en cas d'égalité on met les deux flèches).

Tracer le graphe de cette relation.

Peut-on en déduire une liste représentant "le" jugement des 700 électeurs ?

On utilise la même méthode en supposant cette fois que les résultats obtenus ont été les suivants :

acdb	52	cdba	6
badc	2	cbad	104
dabc	211	adcb	15
dcab	98	adbc	14
bcda	120	bacd	84

Mêmes questions que précédemment.

Que pourrait-on faire pour supprimer l'effet de non-transitivité ?