Bulletin de l'APMEP n°290 - Septembre 1973

Dessin et mathématique

par N. PICARD (chargée de recherche à L'IREM de Paris)

L'un des buts de l'enseignement des mathématiques est d'apprendre aux enfants à être *créateurs*. Un des moyens fournis par les mathématiques pour créer est l'invention d'*algorithmes*. Or on constate qu'en art, consciemment ou non, on utilise des algorithmes. Partant de là, on peut faire prendre conscience aux enfants qu'il y a moyen de créer à partir d'une certaine volonté.
Voici quelques thèmes possibles qui peuvent servir de points de départ.

1 **Etude d'une toile de Picasso :** *Chandelier, Pot et Casserole* (Musée d'Art Moderne, Paris).

Si l'on observe ce tableau, on a dès le début l'impression d'être devant une oeuvre structurée ; de plus, le pot se retrouve dans plusieurs autres toiles : c'est vraisemblablement lui qui a servi de point de départ à l'oeuvre.

On peut considérer un dessin comme constitué de points reliés par des traits (relations entre les points). Dans le cas du Picasso étudié, on constate que les mêmes points peuvent servir de base pour fabriquer le pot, la bougie, le bougeoir (à l'échelle près) et que la casserole est faite à l'aide de points de l'assemblage des trois autres objets.

Voici l'algorithme de construction de cette toile.

Le pot est considéré comme la représentation d'un graphe (A, Cp), Cp étant une partie de A $\times$ A.

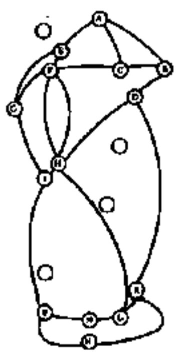


fig. 1

Le chandelier et la bougie sont construits à partir du même ensèmble A, mais on a pour chacun d'eux un ensemble de couples partie de A × A : C_c et C_b

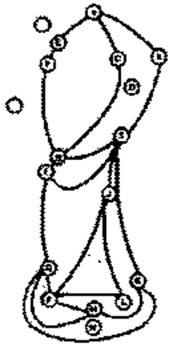


fig. 2

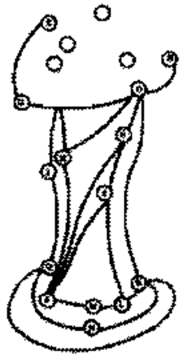
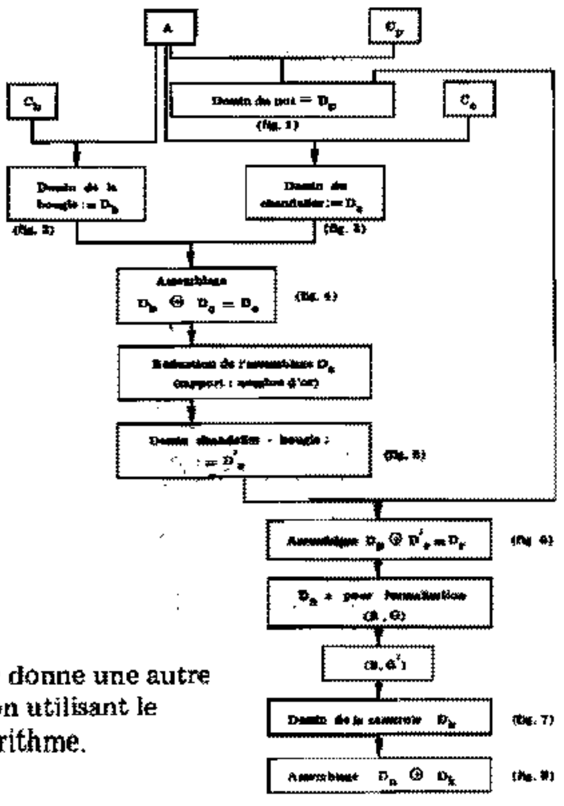
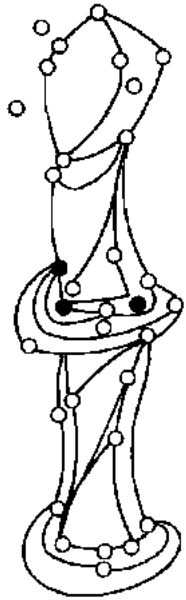


fig. 3

L'algorithme de construction est le suivant :



La figure 9 donne une autre composition utilisant le même algorithme.



Assemblage :
chandelier bougie

F $\xrightarrow{\text{est sur}}$ P

C $\xrightarrow{\text{est sur}}$ L

R $\xrightarrow{\text{est sur}}$ Q

fig. 4

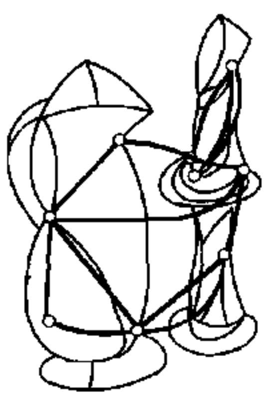


fig. 5, 6, 7

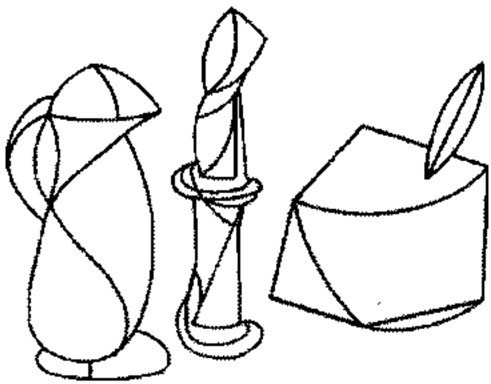


fig. 8

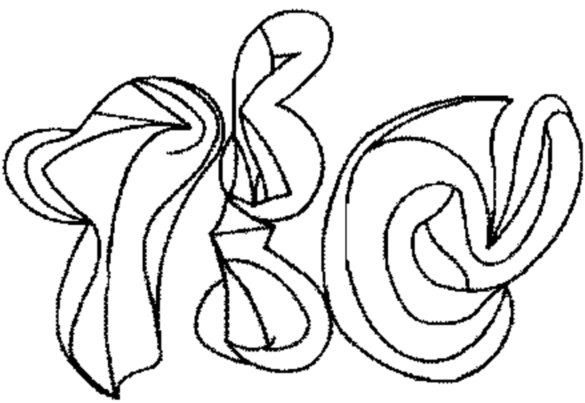
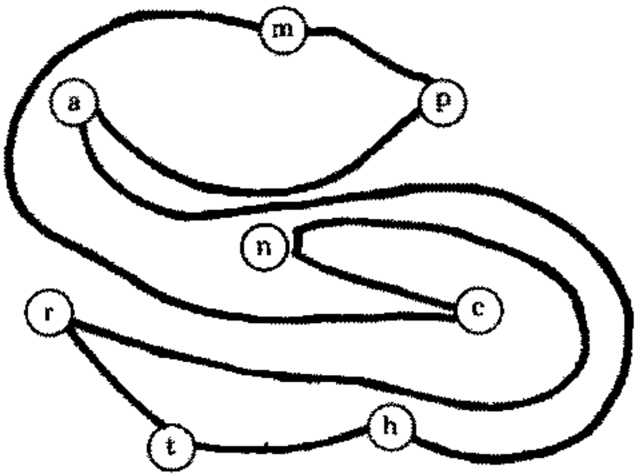


fig. 9

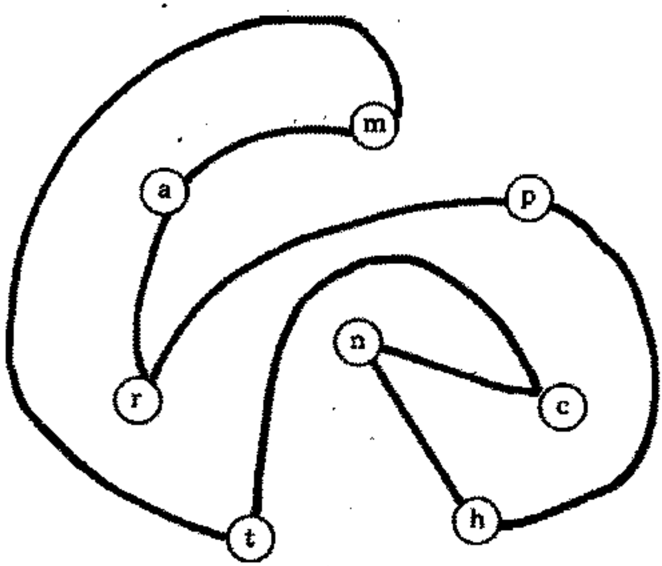
Application (CM)

On donne une feuille polycopiée sur laquelle sont marqués des points numérotés : les enfants doivent lier ces points comme ils le veulent du moment que les lignes de liaison ne se coupent pas. Chacun établit la table des relations d incidence, puis utilise cette table pour faire un autre dessin.



	a	m	n	p	c	r	h	t
a				■			■	
m				■	■			
n					■	■		
p	■	■						
c		■	■					
r			■					■
n	■							■
t						■	■	

fig. 10



	a	m	n	p	c	r	h	t
a		■				■		
m	■							■
n					■		■	
p						■	■	
c			■					■
r	■			■				
h			■	■				
t		■			■			

fig. 10 bis

2 Etude d'une toile de Mondrian

Cette toile se compose de petits carrés bleus, roses et orange (figure 11). On peut mettre en evidence que les couleurs peuvent être réparties suivant un algorithme (certainement pas explicité par Mondrian) ;

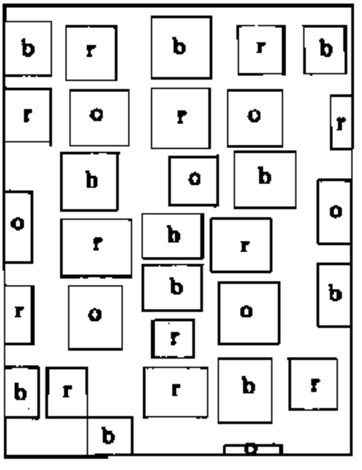


fig. 11

1°) On peut considérer chaque carré comme un élément de la toile et le symboliser par un point. On considère sur cet ensemble la relation qui s'exprime par "*être voisin de ... et avoir une couleur différente de* ..." ; on peut alors tracer le diagramme de cette relation (figure 12).

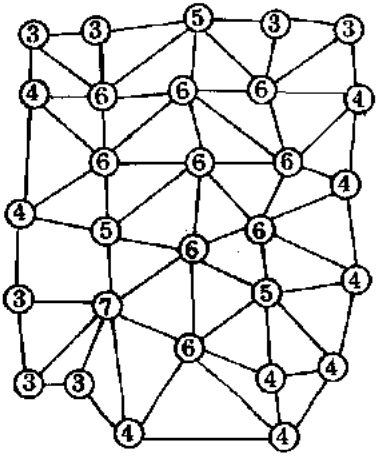


fig. 12

(les deux surfaces bleues contiguës ont été considérées comme un seul élément).

2°) On constate que certains éléments ont plus de correspondants que d'autres (figure 12). Cela permet d'établir une hiérarchie entre ces éléments. Si deux éléments ont même nombre de correspondants, le preféré sera celui dont les correspondants ont le plus de correspondants. On peut tracer ainsi un chemin passant par tous les points du diagramme (figure 13). Existe-t-il d'autres chemins équivalents ?

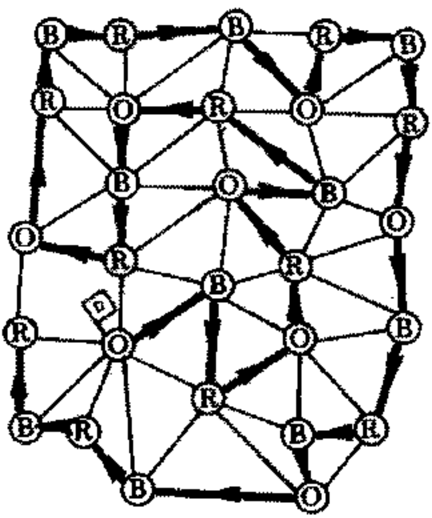


fig. 13

3°) La coloration va être effectuée en appliquant sur les éléments ordonnés de ce chemin une fonction de Grundi : on choisit pour les couleurs l'ordre orange, rouge, bleu. On attribuera à un élément du chemin la valeur orange chaque fois que c'est possible (c'est-à-dire si cet élément n'est pas lié à un élément orange) sinon la valeur rouge ; si ce n'est pas possible, la valeur bleu (figure 13).

On retrouve ainsi la coloration de la figure 11.

a) Existe-t-il d'autres colorations telles que les deux rectangles voisins et les deux rouges voisins soient conservés et qu'il n'existe pas un autre couple de voisins de même couleur ?

b) Peut-on utiliser un algorithme du même genre pour colorier avec le moins de couleurs possible la carte des départements français ?

3 Dallages

On peut fabriquer des dallages par symétries ou rotations d'un motif. Ce procédé a été utilisé par les Arabes. On trouve dans leurs créations les dix-sept "groupes de dallages" que l'on peut ainsi constituer, ce qui prouve qu'ils étaient de bons algébristes bien avant les Européens.

Un moyen commode de fabriquer des dallages grâce à des symétries est d'utiliser du papier calque. On trace les droites qui serviront d'axes de symétrie. On dessine un motif, on plie successivement sur chaque axe et l'on repasse tout ce qui apparaît. Les figures 14 à 17 ont été obtenues par ce procédé. Comment étaient les uns par rapport aux autres ? A quels groupes correspondent-ils ?

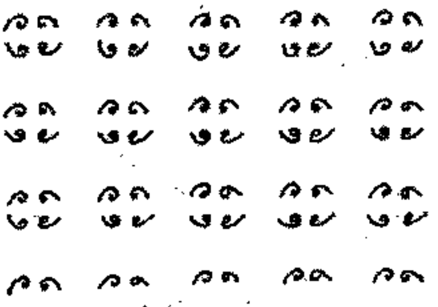


fig. 14

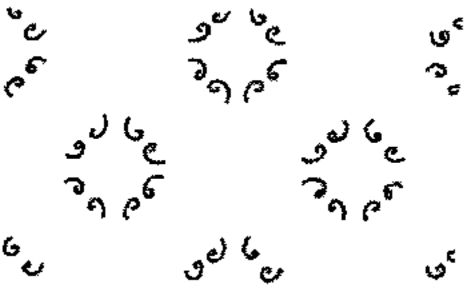


fig. 15

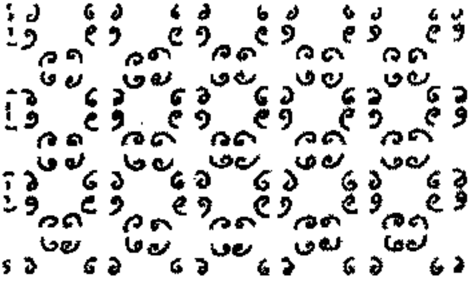


fig. 16

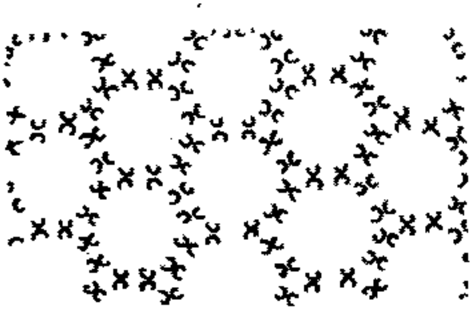


fig. 17

Des constructions de ce genre ont été faites dans des classes de CM2, ce qui nous a permis de chercher les axiomes des groupes correspondants.

Ce travail peut également être fait dans un groupe de maîtres de l'enseignement élémentaire : on peut se proposer de trouver une méthode pour dresser la liste exhaustive de tous les groupes possibles.

Parmi les moquettes imprimées modernes, chercher quels groupes sont utilisés. Chercher le motif minimum qui permet d'engendrer la moquette.

Rosaces : La rosace de la figure 18 est engendrée par les symétries par rapport à deux droites des trois traits marqués en gras. Comment sont ces droites ? Etablir la table de composition du groupe correspondant.

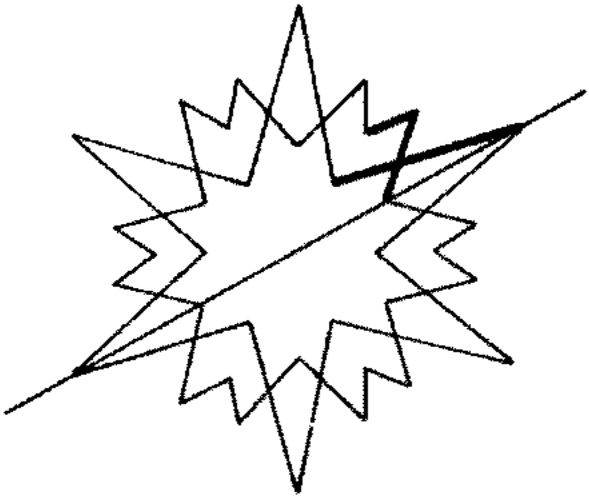
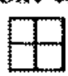


fig. 18

4 On attribue à chaque élément d'une structure finie une couleur, la table de la loi de composition interne de cette structure donnera alors un tableau coloré qui apparaît plus clairement que par l'utilisation de lettres pour désigner les éléments. Du point de vue esthétique, si l'on choisit bien ses couleurs, on peut obtenir des choses intéressantes, surtout si l'on a une structure non commutative (pas trop de symétries). Les non-groupes sont plus intéressants du point de vue esthétique.

Un exemple du même type (on part d'une algèbre de Boole) : On cherche quelles sont toutes les façons de colorier 0, 1, 2, 3 ou 4 cases d'un carreau  à quatre cases.

On obtient un ensemble E de 16 éléments et on introduit une opération dans E × E : on superpose deux éléments a et b, on obtient l'élément ab en coloriant les cases à la fois coloriées dans a et b.

La table de composition est donnée par la figure 19.

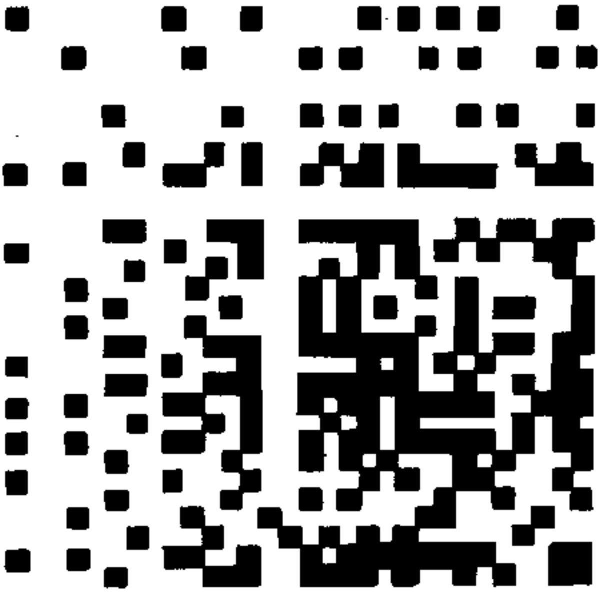


fig. 19

On pourrait, bien sûr, introduire d'autres lois de composition (les connecteurs logiques binaires nous donneront des idées). Expérience faite, c'est assez amusant car le jeu des cases coloriées fait des assemblages inattendus.

5 Directions principales d'un tableau (recherche de Bernard PARZISZ)

La recherche des directions principales représentées dans un tableau amène le plus souvent la constatation suivante : dès qu'on a une direction, on trouve également sa symétrique par rapport à la verticale, la direction perpendiculaire et la symétrique de celle-ci par rapport à la verticale. Si l'on considère les quatre applications suivantes de l'ensemble des directions du plan dans lui-même :

E : identité ; P : rotation d'un angle droit ; S : symétrie par rapport à la verticale ; $P \circ S$ $(= S \circ P)$;

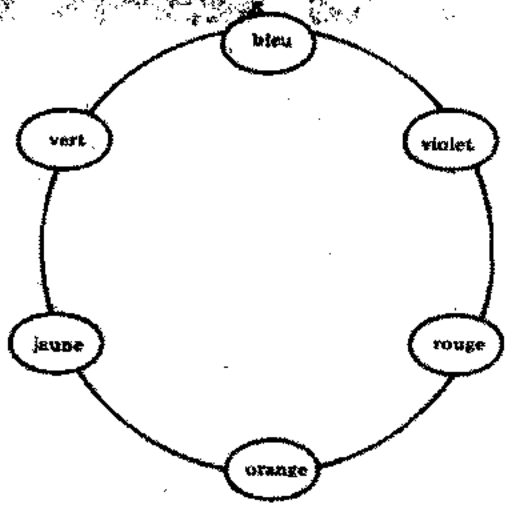
l'ensemble $\{E, P, S, P \circ S\}$ est muni d'une struture de groupe commutatif (groupe de Klein) pour la loi.

Ceci permet de grouper les directions en ensembles à quatre éléments invariants par ce groupe et de faire sentir aux enfants l'unité sous-jacente à un tableau.

6 Problème ouvert : "cercles de couleurs" de Paul Klee :

Paul Klee a eu l'idée d'un cercle pour présenter les couleurs : sur ce cercle on place les couleurs bleu, rouge, jaune, puis diamétralement opposé au bleu l'orange, diamétralement opposé au rouge le vert, diamétralement opposé au jaune le violet.

Remarquant que l'orange est fabriqué de rouge et de jaune et que sur le cercle l'orange est entre le rouge et le jaune (remarque de même type pour le vert et le violet), on se propose de placer sur ce cercle d'autres couleurs composées (toutes celles que l'on veut) et de les *coder*. On se pose ensuite quelques questions : un codage nous étant donné, pouvons-nous reconstituer la composition de la couleur codée ? Les couleurs se fabriquent ainsi de proche en proche, ce qui donne l'idée d'une "génération" de couleurs ; un codage peut-il permettre de trouver la génération d'une couleur ? Etude de la relation d'équivalence "*être de la même génération que*". Etude de la relation d'ordre "*être d'une génération antérieure à*".



(figure 20)

On trouve un codage dans "Cube des couleurs" de Hickethier (Dessain et Tolra, éditeur). Est-ce un bon codage ? Pourquoi ? Toute couleur est un mélange des couleurs fondamentales dans des proportions données : la première "génération de couleurs composées" est constituée des mélanges indiqués par la table :

.	r	b	j
r			
b			
j			

avec pour tout couple de couleurs (x, y)

$$x.y = y.x$$

$$x.x = x$$

La deuxième génération est obtenue par mélange des couleurs de la première génération, etc ...

Ce problème, posé aux participants du Club de Mathématique de l'IREM de Paris, nous a donné l'occasion de traiter quelques processus récursifs intéressants. La fin de l'année scolaire ne nous a pas permis d'exploiter toutes les questions suscitées par ce petit problème pourtant anodin.