1

DANS NOS CLASSES

Initiation aux vectoriels en classe de seconde

par M. MOTTE (Toulon)

Intention de ces fiches

Introduire la notion de vectoriel sans faire appel aux *vecteurs géométriques*, à **R** sur **R**, à $\mathbf{R}^2$ sur **R**, aux espaces de fonctions ; je voulais des vectoriels dont la manipulation soit aisée, intériorisable, pour essayer d'en développer une bonne intuition avant la formalisation.

J'ai choisi de partir des *matrices* dont l'introduction me permettait de retrouver une ouverture sur des problèmes réels, et de faire étudier plus particulièrement le vectoriel des matrices carrées d'ordre deux, réelles, pour avoir immédiatement la dimension 4.

Organisation du travail

Les fiches 1 à 6 et 9 à 12 ont fait l'objet d'une étude par groupes de trois élèves.

Les fiches 7 et 8 ont fait l'objet d'un devoir à la maison.

Les fiches 13 à 15 ont fait l'objet d'une étude individuelle coupée de corrections au tableau, échange de solutions.

Déroulement

Après l'étude des fiches 1 à 12 une synthèse a permis de dégager les axiomes et les premiers théorèmes.

Ceux-ci sont alors lus sur un manuel (Queysanne et Revuz, paragraphes 13-5 et 13-6) et nous traitons quelques exercices de calcul vectoriel.

L'étude du paragraphe 13-7 (sous-vectoriels) est faite en ajoutant des exemples et des contre-exemples. L'étude, suggérée par un élève, de l'ensemble F' des $\alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b}$ ($\vec{a}$, $\vec{b}$ donnés) a amené à de nombreuses questions : est-ce que F' = F ? (F ensemble des $\alpha\vec{a}$) ; est-ce que F' = E ? qu'on examine en reprenant les modèles connus. On constate que le plan matériel est insuffisant pour représenter F' si E = M_2.

Enfin l'étude des fiches 13 à 15 introduit les notions de partie génératrice, de partie libre, de base, dont les définitions seront étudiées dans Bréard ainsi que toute la suite du cours de géométrie.

MATRICES

1 Achats et matrices

Dans le "problème des lions" nous avons utilisé deux tableaux numériques : le tableau C des coûts des transports pouvant être envisagés et le tableau A d'affectation. Ces deux tableaux avaient même colonne d'entrée (De Cologne, Amsterdam ...) et même ligne d'entrée (A Paris, Mulhouse, ...). De tels tableaux de nombres, dépouillés des ligne et colonne d'entrée, s'appellent des *matrices*. On complète éventuellement les cases vides par des zéros.

Si les tarifs aériens augmentent simultanément de 3 % dans tous les aéroports, chaque coût sera multiplié par 1,03. On peut, au lieu d'écrire la nouvelle matrice des coûts, C', enregistrer :

$$C' = 1{,}03 \times C$$

avec la *convention* que "*multiplier une matrice par un nombre, c'est multiplier chaque élément de la matrice par ce nombre*".

On rencontre ici un exemple de loi de composition externe sur l'ensemble des matrices : au couple (k,M) ($k \in \mathbf{R}$, M matrice) correspond une matrice M'.

Si le 1er mars 1972 le résultat d'une convention internationale d'augmentation des tarifs aériens se traduit par des pourcentages d'augmentation **différents** suivant les aéroports de départ, on préférera dresser le tableau C_1 des accroissements des coûts (on dit parfois "accroissements absolus" par opposition aux pourcentages qui sont des "accroissements relatifs" / relatifs à 100 F). Il n'est pas exclu que pour certains aéroports ces accroissements soient des réductions ! Dans ce cas on peut utiliser les négatifs, ou, comme les banques, l'inscription en rouge.

C' désignant la nouvelle matrice des coûts au 1-3-72, il sera naturel d'écrire :

$C' = C + C_1$ pour résumer l'addition "case à case" (les mathématiciens disent : la *matrice-somme* est formée en affectant à l'emplacement (i,j) — ligne i, colonne j — la somme des termes situés en (i,j) dans les deux matrices).

On a ainsi défini une addition sur l'ensemble des matrices *de même taille* (n lignes, p colonnes).

La préparation du 14 juillet

Eric, Bruno et Fany ont décidé de s'amuser le soir du 14 juillet. Ils ont acheté des fusées (f), des feux de bengale (b), de petits pétards (p) et des serpenteaux (s).
Voici le tarif unitaire :

f	b	p	s
x	y	z	t

et les achats des enfants :

	f	b	p	s
Eric	5	2	10	1
Bruno	3	0	20	5
Fany	2	10	6	0

Calculez la dépense a d'Eric.

Vous pouvez résumer le calcul en écrivant :

$$(5\ ,\ 2\ ,\ 10\ ,\ 1) \times (x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t) = (5x + 2y + 10z + t) = (a)$$

ou bien :

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (5x + 2y + 10z + t) = (a)$$

ou bien : $$(5\ ,2\ ,10\ ,1) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (5x + 2y + 10z + t) = (a)$$

C'est cette dernière manière qui a prévalu et nous verrons pourquoi.

On peut déjà remarquer que l'on distingue ainsi une matrice-*quantité* [ici matrice-ligne] d'une matrice de *prix* [ici matrice-colonne].

Voici la dépense de Bruno $(3\ ,\ 0\ ,\ 20\ ,\ 5) \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Quelle est celle de Fany ?

Résumons la situation :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & 0 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \text{dépense d'Eric} \\ \longleftarrow \text{dépense de Bruno} \\ \longleftarrow \text{dépense de Fany} \end{array}$$

Le produit de la matrice rectangulaire (3 lignes, 4 colonnes) par la matrice colonne à 4 lignes est une matrice colonne à 3 lignes.

Le 13 juillet le marchand de fusées et pétards a baissé ses prix.

Nouveau tarif :

f	b	p	s
x'	y'	z'	t'

Qu'aurait été la matrice des dépenses si les enfants avaient fait leurs achats ce jour-là ?

Résumons les deux situations :

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 & 1 \\ 3 & 0 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 6 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

dépenses le 13/7

dépenses réelles

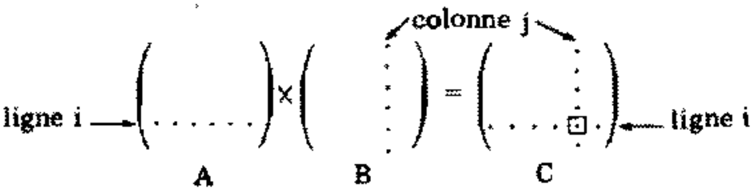
1er tarif

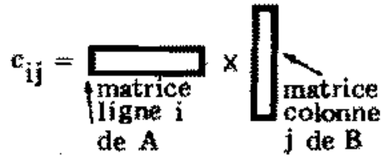
2e tarif

On dit qu'on a effectué le *produit* de deux matrices rectangulaires.

Pouvez-vous transposer ce produit à deux matrices rectangulaires quelconques ? Quelle condition doit lier les "tailles" (n,p), (m,q) des deux matrices pour autoriser le calcul ci-dessus ?

D'autres situations ont conduit à définir le produit de deux matrices exactement comme il vient d'apparaître ici :





c_{ij} est la somme des produits des termes de même rang de la ligne i de A et de la colonne j de B.

Remarques

1) Bien que l'expression "l'ensemble des matrices sur **R**" définisse un ensemble bien déterminé, on voit, d'après ce qui précède, qu'il a peu de chances de nous intéresser, que ce soit pour étudier un problème concret ou pour en faire l'objet d'une étude théorique, puisque la seule opération définie "partout" sur cet ensemble est l'opération externe "*multiplication par un réel*".

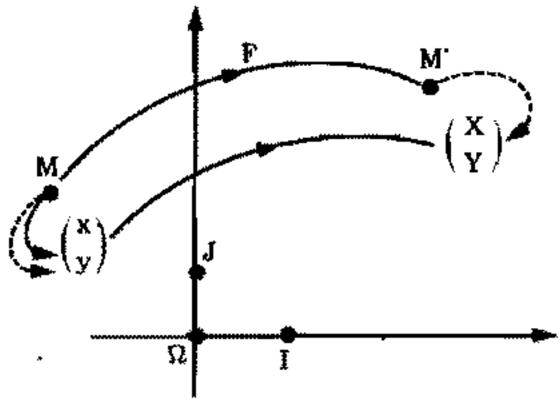
2) Par contre l'ensemble des *matrices carrées d'ordre n* (n lignes, n colonnes) — n donné — se trouve muni de deux lois de composition interne et une loi de composition externe.

   Ces matrices interviennent justement en géométrie.

2 Matrices et géométrie

Vous avez déjà utilisé en troisième la bijection $\mathcal{B}$ établie entre le plan P et **R** × **R** *par le choix d'un repère* (Ω, I, J) *qui entraîne la graduation* des droites ΩI et ΩJ appelées alors "axes de coordonnées".

Pour définir une application F de P sur P (souvent appelée "transformation géométrique") *il suffit* de se donner un procédé de calcul de $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ connaissant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc une application f de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$.



$\mathfrak{B} : M \longmapsto (x,y)$

$F : M \longmapsto M'$

$f : (x,y) \longmapsto (X,Y)$

$$\boxed{F = \mathfrak{B}^{-1} \circ f \circ \mathfrak{B}}$$

Exemples :

$f_1 \begin{cases} X = x + 5 \\ Y = y + 2 \end{cases}$ $\quad$ $f_2 \begin{cases} X = -2x \\ Y = -2y \end{cases}$ $\quad$ $f_3 \begin{cases} X = x \\ Y = 0{,}5\, y \end{cases}$

$$f_4 \begin{cases} X = x^4 + 2x^3 - y \\ Y = 5 - x^2 + y \end{cases}$$

a) Examinez *empiriquement*, à l'aide de dessins, les applications F_1, F_2, F_3 définies par f_1, f_2, f_3.

b) Démontrez que ce sont des bijections.
Plus généralement à quelle condition l'*application affine*

$$f \begin{cases} X = ax + by + c \\ Y = a'x + b'y + c' \end{cases}$$

définit-elle une bijection de $\mathbf{R}^2$ et par suite de P ?

Le résultat que vous venez d'établir est important à retenir.

Contre-exemple

Définissez une application f (choisissez les valeurs des paramètres (a,b,c,a',b',c')) qui ne soit pas une bijection de $\mathbf{R}^2$.

Examinez l'application F correspondante.

c) Limitons-nous aux applications affines de $\mathbf{R}^2$ dans lesquelles $c = c' = 0$: on les appelle *linéaires.*

Remarque : Si $c \neq 0$ ou $c' \neq 0$

alors $\begin{cases} X = X_1 + c \\ Y = Y_1 + c' \end{cases}$ avec $\begin{cases} X_1 = ax + by \\ Y_1 = a'x + b'y \end{cases}$

Donc f est *la composée d'une application linéaire* f_1 *et d'une* application affine d'un des types examinés en a) et appelé "*translation*".

Etude

Exprimez matriciellement le système $\begin{cases} X = 2x - 3y \\ Y = x + y \end{cases}$

Reconnaissez dans la matrice $\begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + y \end{pmatrix}$ un produit de matrices.

Résumez :

$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ est définie par $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} =$

Même travail pour l'application linéaire $g \begin{cases} X = -x + 2y \\ Y = 2x - y \end{cases}$

Cherchez la matrice associée à $g \circ f$. Que remarque-t-on ?

Conclusion : Si (f) est la matrice de l'application linéaire f,

si (g) . . . . alors

3 Matrices et systèmes

Le système $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$

est résumé par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Nous avons démontré que ce système a une et une seule solution si et seulement si le déterminant *associé* à la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ est différent de zéro.

Remarquons que lorsque le système a une solution unique, le résoudre c'est trouver le moyen de passer de l'égalité matricielle (1) à l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \text{ou bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Le problème est donc lié à l'existence d'une matrice M telle que

$$M \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ceci suggérerait d'étudier la structure de $(M_2, \times)$
(M_2 : ensemble des matrices carrées réelles d'ordre 2) pour chercher :

— si cet ensemble est symétrisé pour la multiplication ;

— quels sont les éléments inversibles ;

— par quel procédé calculer l'inverse de $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$?

Mais le paragraphe 2 motive une étude complète de M_2 muni de ses deux lois internes et de sa loi externe et, plus précisément, l'étude :

— de $(M_2, +, \times)$ qui fera l'objet d'un devoir ;

— de $(M_2, +, ., \mathbf{R})$ que vous allez entreprendre.

4 Etude de $(M_2, +, ., \mathbf{R})$. Plan :

. Après l'étude de $(M_2, +)$ il faudra envisager les rapports, les liens, entre l'opération interne et la loi externe, c'est-à-dire *chercher les calculs* pouvant faire entrer en jeu :

— l'addition de M_2 et la loi externe ;

— mais aussi l'addition de $\mathbf{R}$ et la loi externe ;

la multiplication de $\mathbf{R}$ et la loi externe ;

et les questions posées par ces calculs.

A combien d'études se ramène le problème ? Il sera commode pour exprimer chaque étude par une expression littérale de convenir de noter les matrices par les majuscules d'imprimerie, les réels par les minuscules cursives.

Conclusions des études ?

Il restera alors à examiner le comportement des éléments neutres dans l'opération externe : combien d'études ? résultats ?

Récapituler les propriétés caractérisant la structure $(M_2, +, ., R)$.

Dans ce tableau récapitulatif deux propriétés pourraient être supprimées parce qu'on peut les déduire chacune des autres : voyez-vous lesquelles ?

En résumé la structure de $(M_2, +, ., R)$ est caractérisée par l'énoncé des propriétés ... (nouveau tableau ou nouveau cadre dans le précédent).

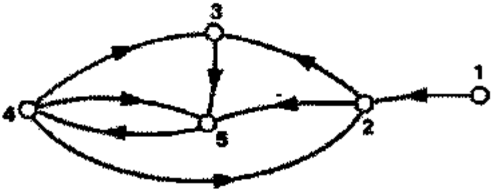
L'étude de $(M_3, +, ., R)$ différerait-elle de celle-ci ?

L'étude de M_3 interviendra en première dans la *géométrie dans l'espace*.

Le fait qu'on calcule dans $(M_3, +, .)$ comme dans $(M_2, +, .)$ laisse cependant subsister des différences importantes entre ces deux structures.

Le problème de la circulation en ville et des sens uniques

Un nouveau commissaire de police arrive dans une (petite) ville qui a cinq carrefours et huit rues suivant le schéma :



Il voudrait savoir si un automobiliste peut aller d'un carrefour (n'importe lequel) à un autre carrefour (n'importe lequel) en employant un nombre raisonnable de rues (si c'est trop compliqué il sera obligé de changer des sens uniques, ou d'en abandonner à la double circulation, ce à quoi le maire n'est pas favorable).

Il peut résoudre son problème en analysant le graphe — c'est simple dans ce cas ! En serait-il de même s'il y avait 80 rues et 25 carrefours ?

Il peut résoudre plus facilement ce problème en utilisant les matrices.

Construisons d'abord un tableau des rues permises d'un carrefour vers un carrefour (il s'agit des trajets directs, sans carrefours intermédiaires, trajets correspondant à un *arc* du *graphe*).

de \ vers	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1
3	0	0	0	0	1
4	0	1	1	0	1
5	0	0	0	1	0

On y voit immédiatement que de n'importe où on ne peut pas aller vers 1.

On va appeler ce tableau *matrice de transfert* du graphe (ou matrice associée au graphe) :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de transfert décrit le réseau des rues à sens unique. Elle est aisée à relever quel que soit le nombre de carrefours et le nombre de rues desservant un carrefour.

. Sur la matrice T je sais lire d'un coup d'oeil le nombre c de chemins reliant un carrefour i à un carrefour j (ici $c \leq 1$ mais c pourrait être supérieur à 1). Mais je peux *aussi* savoir *combien* l'automobiliste aura de rues à prendre pour aller de i à j (en cherchant à en prendre le moins possible).

Par exemple pour aller de ② à ④ :

a) Il n'y a pas de chemin direct.

b) Y a-t-il un chemin en deux rues :

— de ② à ③ ? oui mais pas de ③ à ④ .

— de ② à ⑤ ? oui et de ⑤ à ④ ? oui : c'est la solution.

En étudiant ce même problème (combien de chemins de (2) à (4) utilisant deux rues) *en faisant varier les données* (matrice T) *montre :*

— que ce nombre ne dépend que de la deuxième ligne et de la quatrième colonne ;

— qu'il est donné par le produit de la deuxième ligne de la matrice par la quatrième colonne de cette même matrice.

Conséquence : Tous les chemins possibles en deux rues, de n'importe quel carrefour à n'importe quel autre, seront donnés par les produits de toutes les lignes par toutes les colonnes, donc par le produit de la matrice par elle-même, soit $T \times T = T^2$.

Travail proposé

a) Calculez T^2 .

b) Quelle est la matrice qui donne le nombre de chemins en *une ou deux* rues de tout carrefour à tout carrefour ?

c) Quelle est la matrice qui donne le nombre de chemins en *trois* rues ?

d) On change tous les sens interdits : quelle est la nouvelle matrice T' ?

e) Donnez le schéma (graphe) des carrefours et rues à sens unique d'une ville dont la matrice de transfert est donnée par le tableau ci-dessous :

de \ vers	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	0	0	1	0	1	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	1	0	0	1
c	0	1	0	1	0	0	0	0	0
d	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e	0	1	0	1	0	0	0	0	0
f	0	0	1	0	0	0	0	0	0
g	0	0	1	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	1	0	0	0	0
i	0	0	0	0	1	0	0	0	0

En respectant la matrice de transfert modifiez le graphe de façon que les arcs ne se coupent pas, autrement dit de façon à avoir le schéma d'un réseau dans lequel les rues ne se couperaient ni sur le terrain ni sur la carte, en dehors des carrefours.

En cas de difficulté faire une maquette (boutons ou disques de carton ou capsules pour les carrefours ; fil élastique pour les rues).

On peut aussi procéder en cherchant sur la matrice les "mailles" du réseau :

dans le premier exemple les rues $3 \to 5$, $2 \to 3$, $2 \to 5$ forment une *maille.*

Comment trouve-t-on les mailles sur la matrice ?

(Sujet communiqué par Jean Renaux, ingénieur et père d'élèves).

5 Combinaison linéaire dans le vectoriel $(M_2, +, ., R)$

Voici des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. a) pour toute matrice U de M_2 il existe au moins un quadruple $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de réels tel que $U = \alpha.A + \beta.B + \gamma.C + \delta.D$.

   b) $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est unique.

   Conclusion : Tout vecteur de l'espace M_2 est, d'une et d'une seule manière, combinaison linéaire des vecteurs A, B, C, D.

2. a) L'ensemble des matrices obtenues par combinaison linéaire de *trois* des matrices A, B, C, D est une partie propre de M_2 — c'est-à-dire on n'obtient pas tout vecteur de M_2 comme combinaison linéaire de *trois* des vecteurs A, B, C, D — .

   b) Si U est combinaison linéaire de A, B, C alors cette combinaison est unique.

3. Soit $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   a) Toute matrice combinaison linéaire de A, B, E peut s'écrire comme combinaison linéaire de A et B.

b) Montrez sur un exemple que toute combinaison linéaire de A et B peut s'écrire, de *plusieurs* manières, comme combinaison linéaire de A, B, E.

4. a) Tout vecteur combinaison linéaire de A, B, C, D, E est combinaison linéaire de A, B, C, D.

b) Montrez sur un exemple que *tout* vecteur de M_2 *est* de *plusieurs* manières combinaison linéaire des vecteurs A, B, C, D, E, d'une *seule* manière combinaison linéaire de B, C, D, E, de A, C, D, E, mais *n'est pas* nécessairement combinaison linéaire de A, B, C, E.

5. Voici d'autres matrices :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Tout vecteur de M_2 est d'une et d'une seule manière combinaison linéaire des vecteurs A', B', C', D'.

6. Peut-on assurer que tout vecteur de M_2 est d'*une* et d'*une seule* manière combinaison linéaire de I, J, K, L :

$$I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ ?$$

7. Démontrez qu'aucune des matrices I, J, K, L ne peut être obtenue comme combinaison linéaire des trois autres. Conséquence : il n'est pas possible d'engendrer M_2 comme ensemble des combinaisons linéaires de trois des matrices I, J, K, L.

8. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -0{,}5 \end{pmatrix}$; trouver $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

telle qu'elle n'appartienne pas au sous-vectoriel engendré par M et N.

On peut alors se proposer de trouver Q telle qu'elle n'appartienne pas au sous-vectoriel engendré par M, N, P. Puis se demander si on peut continuer ainsi longtemps.

6 Brève visite dans l'espace M_3 des matrices carrées réelles d'ordre 3.

Ecrivez la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

comme combinaison linéaire des neuf matrices dont un élément est 1 et les autres 0.

Montrez sur un exemple qu'il est impossible d'engendrer M_3 en prenant les combinaisons linéaires de n de ces matrices, si $n < 9$.

7 On dégage des exercices précédents les notions suivantes :

Il est possible de choisir une partie P de M_2 de façon que l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de P, c'est-à-dire le sous-vectoriel engendré par P, soit identique à M_2 ; une telle partie est une *partie génératrice*.

On peut démontrer que toute partie génératrice de M_2 comprend *au moins* 4 vecteurs distincts.

Si dans une partie génératrice un vecteur est combinaison linéaire des autres, on obtient une nouvelle partie génératrice en le supprimant.

Si *aucun* des vecteurs d'une partie P n'est combinaison linéaire des autres, alors P est appelée *partie libre*.

Si un vecteur de M_2 est combinaison linéaire des vecteurs d'une partie libre, alors cette combinaison linéaire est unique (à prouver).

On peut démontrer que toute partie libre de M_2 a *au plus* 4 vecteurs distincts et que toute partie libre ayant moins de 4 éléments peut être complétée pour donner une partie *génératrice*.

Si une partie est à la fois génératrice et libre, alors tout vecteur de M_2 s'exprime d'une et d'une seule manière comme combinaison linéaire de ses éléments et on l'appelle *base* du vectoriel.

$\{A, B, C, D\}$ est la base canonique de M_2.

8 Matrices et systèmes

Soit le système $\begin{cases} a x + b y = c \\ a' x + b' y = c' \end{cases}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ la matrice associée.

a) Examinez ce que devient M si l'on remplace $ax + by = c$:

par l'équation équivalente : $(ka)x + (kb)y = kc \qquad (k \neq 0)$;

par la combinaison linéaire :
$k(ax + by) + k'(a'x + b'y) = kc + k'c' \qquad (k \neq 0)$.

Enoncez les transformations que l'on peut appliquer à la matrice des coefficients des inconnues d'un système pour passer à celle d'un système *équivalent*.

b) Montrez qu'en utilisant de telles transformations on peut passer de

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{à} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cherchez à réduire le nombre des transformations.

c) Opérez la même suite de transformations sur

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -7 & 11 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ (il faut arriver à } P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 1 & \bullet \end{pmatrix} \text{)}$$

Déduisez-en la solution du système $\begin{cases} 4x - 7y = 11 \\ -x + 3y = -4 \end{cases}$.

d) Exercez-vous à résoudre de la même façon les systèmes :

$$\begin{cases} 4x + 6y = 3 \\ 5x - 3y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 8 \\ 2x - y + 4z = 3 \\ -x + 2y - z = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y - 2z = -3 \\ 15x - 6y + 5z = 25 \end{cases}$$

Imaginez une disposition matérielle facilitant la conduite de l'étape c).