# Encore des vecteurs

*par BOUTEILLER (Brive)*

Le nouveau programme de Seconde semble vouloir faire précéder l'espace affine par l'espace vectoriel. Le récent cours de Géométrie de M. Frenkel apporte quelques compléments au terme vigoureux "Fumisterie" employé par M. Dieudonné à l'endroit du malheureux Affine.

L'espace affine $\mathcal{A}$ n'est qu'un hyperplan affine d'un espace vectoriel convenable $\widehat{E}$. L'espace physique n'apparaît homogène que parce qu'il ne contient pas l'origine de $\widehat{E}$ (le passage au projectif réalise d'ailleurs ce plongement de $\mathcal{A}$ dans $\widehat{E}$).

Beaucoup de monde tenant encore à $\mathcal{A}$, la présentation de $\mathcal{A}$ après E devient une question de pédagogie. En initiation on peut introduire les axiomes de Chasles (cf. Riche 2eC). En revision on peut utiliser l'espace homogène (cf. Revuz TC). Peut-on espérer une uniformisation des notations et l'énoncé des problèmes fondamentaux ? M. Dixmier les énonce très clairement.

A étant fixé dans $\mathcal{A}$, soit $\Phi_A$ la bijection de E sur $\mathcal{A}$ qui à tout vecteur x de E fait correspondre un point M de $\mathcal{A}$ par l'intermédiaire du bipoint (A, M) de $\{A\} \times \mathcal{A}$ tel que $x = \overrightarrow{AM}$; ce faisant, on transporte sur $\{A\} \times \mathcal{A}$ la structure K-vectorielle de E, elle fournit l'espace pointé $\mathcal{A}_A$ ; $\mathcal{A}_A$ et $\mathcal{A}_B$ sont reliés par $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$, c'est-à-dire

$$\Phi_B^{-1}(M) = \Phi_A^{-1}(M) + \overrightarrow{BA}.$$

Toute notion définie dans E est transportée à $\mathcal{A}_A$ par $\Phi_A$ ; elle est dite intrinsèque si elle ne dépend pas de A; la géométrie affine recherche de telles notions.

*Exemple 1*

Soit V un sous-espace vectoriel de E: $\mathcal{V}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{A}$, de direction V, si et seulement si

$$\exists\, a \in E\ , \qquad \Phi_A^{-1}(\mathcal{V}) = a + V \qquad \text{(variété affine de E)};$$

$\Phi_B^{-1}(\mathcal{V}) = \Phi_A^{-1}(\mathcal{V}) + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BA} + a) + V$ montre le caractère intrinsèque de $\mathcal{V}$.

*Exemple 2*

$f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ est une application affine associée à $\varphi \in \mathrm{Hom}(E, E')$ si et seulement si, $u$ étant un vecteur de $E'$ et $t_u$ la translation associée, le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "t_u \circ \varphi"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & E' \arrow[d, "\Psi_I"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "f"] & \mathcal{A}' \end{tikzcd}$$

est commutatif; alors $f = \Psi_I^{-1} \circ (t_u \circ \varphi) \circ \Phi_A^{-1}$. Or, si $v = u + \overrightarrow{JI} - \varphi(\overrightarrow{BA})$ on a: $f = \Psi_J^{-1} \circ (t_v \circ \varphi) \circ \Phi_B^{-1}$, donc $f$ est intrinsèque. On note plus commodément:

$$\overrightarrow{IM'} = u + \varphi(\overrightarrow{AM}) \text{ , et, si } A' = f(A), \quad \overrightarrow{A'M'} = \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

Le mécanicien et le physicien abhorrent les bipoints et utilisent assez discrètement le K-espace $E^{\mathcal{A}}$ des champs vectoriels

$$v : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & v_M \end{array} \right.$$

$(M, v_M)$ est le pointeur de M. Dans son article du numéro 286, pages 964 et 965, M. Rougée distingue $\overrightarrow{AM} \wedge v_M$, (vecteur)-moment en A, et $(A, \overrightarrow{AM} \wedge v_M)$, pointeur-moment en A.

Les principes de la Mécanique font intervenir dans E:

$$R = \sum_{M \in \mathcal{A}} v_M \quad \text{, résultante générale du champ } v,$$

et

$$\mathcal{M}(A) = \sum_{M \in \mathcal{A}} (\overrightarrow{AM} \wedge v_M) \quad \text{, (vecteur)-moment en A du champ } v.$$

Le couple $(R, \mathcal{M}(A))$ est la valeur en A d'un élément $\mathcal{T}$ d'un sous-espace vectoriel $\Theta$ de $(E^2)^{\mathcal{A}}$, dit espace des torseurs. Fixons A dans $\mathcal{A}$ et posons $N' \in \mathcal{A}$ tel que $\overrightarrow{AN'} = \mathcal{M}(N)$ ; alors

$$\theta : \left| \begin{array}{lcl} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ N & \longmapsto & N' \end{array} \right.$$

est affine car:

$$\begin{tikzcd}
\overrightarrow{AN} \arrow[d, mapsto] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Phi_A"'] & A' \arrow[d, "\Phi_{A'}"] & \overrightarrow{A'N'} \arrow[d, mapsto] \\
N & \mathcal{A} \arrow[r, "\theta"] & \mathcal{A} & N'
\end{tikzcd}$$

Or $\overrightarrow{A'N'} = \mathcal{M}(N) - \mathcal{M}(A') = R_{\barwedge}\overrightarrow{AN} = \varphi(\overrightarrow{AN})$ et $\varphi$ et linéaire.

**Commentaire de J.M. CHEVALLIER**

Cette note de notre collègue Bouteiller peut être rapprochée des articles de M. Vogt et de P. Antonini (n° 287) pour ce qui concerne l'Affine et le Vectoriel. Pour les résumer brutalement, on peut aussi bien faire de l'Affine avec des "vecteurs" que du Vectoriel avec des "points" ; les structures importent seules, et non la "nature"(? ) des éléments. On le savait, mais on ne le répétera jamais trop.

Toutefois la note de Bouteiller faisait plutôt suite aux articles de P. Rougée (n° 286) qui portaient sur la mécanique, en particulier sur les notions de "pointeur" et de "glisseur" de la notice VECTEUR du Dictionnaire. Ces notions peuvent être critiquées, elles offrent du moins un moyen d'échapper à des impropriétés comme "moment d'un vecteur", devenues indéfendables. Le moment lui-même est-il un pointeur (comme le disait la notice) ou un vecteur (comme préfère le dire P. Rougée) ? Ni l'un ni l'autre sans doute, mais un *champ*, c'est-à-dire une application dont la *valeur* en M est un certain vecteur $v_M$. Encore ne suis-je pas trop sûr que l'idée sous-jacente au mot "champ" soit effectivement celle d'une application de l'espace affine $\mathcal{A}$ dans l'espace vectoriel E ; je crois (mais cela est une vue personnelle) qu'au fond nous pensons à une application de $\mathcal{A}$ dans l'espace $\mathcal{A} \times E$ des pointeurs $(M, v_M)$. Quoi qu'il en soit, il y a certes beaucoup d'occasions où il est commode (et traditionnel) de ne parler que du vecteur (du "vecteur-vitesse", du "vecteur-accélération", etc...). Mais ce que dit l'auteur une demi-page plus bas au sujet de la force, qui, étant appliquée en M en non pas en n'importe quel point de son support, "*doit* être schématisée par un pointeur", est tout aussi vrai pour le pointeur-accélération, le pointeur-vitesse, le pointeur-quantité de mouvement. Le moyen, d'ailleurs, de définir le moment cinétique autrement que comme le moment de ce dernier pointeur ?