A propos du parallélogramme

par G. SCHACHERER (Epernay)

Les Instructions du 6 février 1970 (classes de secondes) suggèrent la définition suivante :

> *Un quadripoint (A,B,C,D) est un parallélogramme si et seulement si les bipoints (A,C) et (B,D) ont même milieu.*

Si on désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des parallélogrammes, les huit propositions suivantes sont alors équivalentes :

$(A,B,C,D) \in \mathcal{P}$; $(B,C,D,A) \in \mathcal{P}$; $(C,D,A,B) \in \mathcal{P}$; $(D,A,B,C) \in \mathcal{P}$;
$(D,C,B,A) \in \mathcal{P}$; $(C,B,A,D) \in \mathcal{P}$; $(B,A,D,C) \in \mathcal{P}$; $(A,D,C,B) \in \mathcal{P}$.

Remarques

1) La définition précédente ne suppose pas que les points A,B,C,D sont tous distincts. Ainsi (A,B,B,A) est un parallélogramme et de même (A,A,A,A).

2) On peut être tenté d'appeler parallélogramme l'ensemble

$$P = \{(A,B,C,D),(B,C,D,A), \dots (A,D,C,B)\} ,$$

P ayant soit 8, soit 4, soit un seul élément et d'appeler chacun des éléments de P un représentant du parallélogramme. Le seul avantage de cette définition semble être une certaine sauvegarde du "parallélogramme" qu'on nous a enseigné dans notre jeunesse. L'exemple suivant semble en tout cas le prouver.

Si on appelle division harmonique un quadripoint dont le birapport vaut —1 et si on désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des divisions harmoniques, les huit propositions suivantes sont équivalentes :

$(A,B,C,D) \in \mathcal{H}$; $(B,A,C,D) \in \mathcal{H}$; $(A,B,D,C) \in \mathcal{H}$; $(B,A,D,C) \in \mathcal{H}$;
$(C,D,A,B) \in \mathcal{H}$; $(D,C,A,B) \in \mathcal{H}$; $(C,D,B,A) \in \mathcal{H}$; $(D,C,B,A) \in \mathcal{H}$.

Cependant, ici, personne n'a encore proposé d'appeler division harmonique l'ensemble

$$H = \{(A,B,C,D),(B,A,C,D), \dots (D,C,B,A)\} .$$

3) Enfin le mot "aligné" remplacerait avantageusement "aplati" dans la locution "parallélogramme aplati" si on veut bien qu'un ensemble (ou une suite) de points est dit(e) aligné(e) si tous ses éléments (termes) appartiennent à une même droite. On peut enfin remarquer qu'étymologiquement tout parallélogramme est aplati, puisque situé dans un plan.

Commentaires de J.M. CHEVALLIER

Remarque 1. Il semblerait qu'il y a deux types de dégénérescence ; or il y en a trois : (A,B,C,B), (A,B,B,A), (A,A,A,A). Cette correction influe sur la

Remarque 2. L'ensemble P peut avoir 8 éléments (parallélogramme propre), ou 4 (première dégénérescence), ou 2 (deuxième dégénérescence), ou 1 (troisième dégénérescence).

Quant aux avantages ou inconvénients de ces définitions, ils ne sont pas purement sentimentaux, ils proviennent plutôt du fait que le genre de problèmes qu'on se pose à propos du parallélogramme a varié depuis notre jeunesse. Cela n'est d'ailleurs pas spécifique du parallélogramme, on pourrait le dire de tous les polygones. Suivant le problème envisagé, telle ou telle définition est plus commode. Un triangle isocèle est *globalement invariant* par symétrie axiale si ABC et ACB sont *le même* triangle ; même chose pour la symétrie centrale du parallélogramme, etc. — Sinon il faut parler autrement — ou bien se résigner à l'inflation du vocabulaire.