A propos du plan mathématique et du plan physique

Réalité expérimentale, modèles et théories

par J. GADREY (I.R.E.M. de LILLE)

A maintes reprises le débat avec nos collègues stagiaires de l'I.R.E.M. a porté sur la nature même des êtres mathématiques étudiés et leur rapport avec la réalité physique.

Ces questions sont venues naturellement, à propos de certains problèmes pédagogiques très concrets.

Deux exemples parmi d'autres:

Exemple 1 — La théorie des probabilités est introduite par un "passage à la limite" intuitif de fréquences statistiques expérimentales: quels phénomènes réels traduit-elle et permet-elle de "comprendre" (c'est-à-dire de maîtriser) ? Quel rapport y a-t-il entre le fait de tirer des boules dans une urne et l'espace probabilisé associé ? Comment faire comprendre aux élèves ce couplage d'un phénomène naturel et de notions mathématiques définies axiomatiquement ? Comment s'effectuent les processus de mathématisation et d'axiomatisation ?

Exemple 2 — Le plan affine est souvent défini comme ensemble associé à un espace vectoriel, avec certains axiomes de structure. On peut ensuite le "pointer", y définir des bipoints, des classes de bipoints, etc...

"Quel rapport y a-t-il" nous demande-t-on "entre les anciens vecteurs et les nouveaux" ? Est-ce que je peux encore dessiner une  ? Un angle, ce n'est plus une portion de plan ou un couple de droites ? Un double décimètre, est-ce que c'est un bout de droite euclidienne ? etc...

Ces interrogations n'ont rien de ridicule.

Il serait nécessaire, pour y voir plus clair, de décrire (sur une base historique, psychologique et épistémologique) les principaux processus de l'activité mathématique. Cela peut nous mener très loin. Aussi n'est-ce qu'une toute première approximation qui est proposée ici, dans une optique directement utilitaire, et à propos de l'exemple du plan. Sans résoudre les problèmes délicats ici soulevés, au moins peut-on tenter de les sérier.

I Au commencement était le plan: formulation et représentation

Le "plan" d'eau, le sable "aplani", la table, etc... ont un aspect commun qui est aussi en première approximation celui des plaines, etc...

Sur ces divers objets, des problèmes pratiques se sont posés: partage, arpentage, irrigation, parcours et déplacements, etc...

Ce sont les problèmes du "plan physique".

La géométrie traditionnelle est née de là. Les premiers niveaux mathématiques ont été ceux de la formulation (écrite ou parlée, en vue d'une communication) et de la représentation graphique de ces problèmes. Ils ont conduit à utiliser des notions pratiques de point, de droite, de milieu, de segment, de parallélisme, etc...

Nous regrouperons toutes ces notions sous le terme de "plan intuitif". Points communs à ces plans intuitifs de la géométrie classique: pas d'axiomatique explicite au sujet des objets fondamentaux (points, droites,...) et leurs rapports, aucune des distinctions actuelles entre propriétés métriques, affines, projectives, topologiques; mais des raisonnements déductifs se dégageant progressivement du dessin, de la figure: *une ébauche de théorie*.

La géométrie classique, comme celle qu'on enseignait il y a 20 ans, est donc celle du "plan intuitif". Il n'y a pas lieu de la dédaigner; d'abord en raison de son grand âge, ensuite parce qu'elle rend toujours d'éminents services (y compris aux mathématiciens "de pointe"), et surtout parce que nos structures modernes en sont (partiellement) issues et qu'il est utile de montrer comment.

A ce propos, il reviendra aux psychologues de nous dire si cette succession historique (grossièrement schématisée dans ce texte) coïncide ou non avec la construction progressive des mêmes notions par l'enfant, si les structures en question ont un caractère plus ou moins inné, si l'on ne commet pas une erreur en renversant trop brutalement l'ordre historique.

II La mathématisation proprement dite

La notion de segment s'est orientée, si l'on peut dire, vers celle de vecteur, l'origine et l'extrémité devant être distinguées (sens de parcours) et on a pu définir la somme de deux vecteurs mis bout à bout

et la multiplication par un nombre: c'étaient les "vecteurs liés" du temps jadis.

On a défini l'équipollence des vecteurs liés: même sens, même longueur, même direction et, sans utiliser encore le langage moderne des relations d'équivalence, on a envisagé des "vecteurs libres", sorte de champs uniformes de vecteurs, utilisables en divers domaines de la réalité physique. On peut prolonger sur leur ensemble l'addition $\vec{V} + \vec{V}'$ (qui sera alors définie partout) et la multiplication par un nombre, $\alpha \vec{V}$. On se doute que cette "longue marche" ne fut pas "linéaire", qu'elle a pu suivre d'innombrables méandres et que les motivations en sont complexes.

Remarque: on a signalé ici une des mathématisations possibles du plan physique: celle qui part des aspects: équipollence, parallélogramme, somme de parcours, etc... Il faut bien comprendre qu'on ne mathématise pas avec unicité une réalité physique mais qu'on mathématise certains aspects de cette réalité, *à partir de certains types de problèmes posés.* De même, on appellera *expérience* l'ensemble d'un phénomène physique *et de certaines questions qu'on se pose à son propos*: à partir d'un phénomène naturel donné on peut envisager diverses expériences très différentes.

III L'axiomatique vectorielle

Ces vecteurs libres d'un "plan intuitif" (non axiomatisé) se sont trouvés avoir en commun avec d'autres objets mathématiques plus ou moins clairement définis (équations linéaires et différentielles, transformations géométriques, fonctions, etc...) certaines propriétés: celle des groupes en ce qui concerne la somme, d'autres en ce qui concerne la multiplication par un scalaire.

Une telle convergence de situations semblables a fait naître un nouvel objet qui s'efforce de traduire ces "dénominateurs communs": une structure axiomatisée, d'une exceptionnelle fécondité, celle d'espace vectoriel.

On aura remarqué que le processus qu'on vient d'évoquer (l'axiomatisation d'une structure) et qu'il faudrait longuement analyser n'est pas un processus formel et purement déductif mais, bien au contraire, qu'il avance en référence constante aux exemples qui sous-tendent et fondent la théorie ainsi construite.

A ce stade, la construction mathématique déductive peut s'élancer; mais les analogies et les "retours à la base" sont essentiels, y compris dans cette activité plus formalisée.

IV Une axiomatique affine

Le mathématicien, parti de son plan physique, puis de sa représentation semi déductive (plan intuitif) va s'efforcer de définir, dans le cadre familier du langage et de la théorie des ensembles, un modèle mathématique de ce plan, ou plutôt un modèle mathématique *pour ce plan et pour les problèmes de parallélisme, de rapports de segments, de repère, de translations, etc ...*

Il dispose, *dans ce domaine*, de la notion d'espace vectoriel de dimension deux; cette notion ne constitue pas un modèle satisfaisant pour les problèmes en question dans la mesure où, dans un tel espace vectoriel, il y a un élément privilégié (le zéro). Et puis, comment additionner naturellement deux points du plan ? L'espace vectoriel en question est un modèle cohérent pour les vecteurs libres ou pour l'ensemble des vecteurs d'origine donnée du plan, ou pour les translations du plan, mais pas pour le plan lui-même.

D'où la nécessité d'une recherche de "bons" axiomes, de "bonnes" définitions. Il s'agit d'une démarche complexe, où l'on passe sans cesse du niveau intuitif au niveau mathématique, où l'on procède par analogie et rectifications, et qui aboutit à un nouvel objet mathématique, une nouvelle structure axiomatisée, *le plan affine.*

Voici une des définitions axiomatiques possibles: le plan affine est un triplet formé d'un ensemble E, d'un espace vectoriel $\vec{\mathrm{E}}$ de dimension deux sur $\mathbb{R}$, et d'une application ϕ de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans $\vec{\mathrm{E}}$ notée

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \xrightarrow{\phi} \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

telle que:

1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ pour tous A, B, C dans E;

2) pour tout A de E et tout $\vec{V}$ de $\vec{E}$, il existe B unique dans E tel que $\vec{AB} = \vec{V}$;

l'idée intuitive étant ici de "reconstruire" le plan à partir de l'espace vectoriel de ses "vecteurs libres" en suivant en gros le chemin inverse de celui décrit au II, et en retenant des axiomes tels que le modèle traduise bien *à son niveau* les problèmes expérimentaux de départ.

Ce modèle est-il satisfaisant ? c'est-à-dire: Est-ce qu'en l'utilisant dans la résolution de problèmes pratiques on aboutit à des résultats concluants ? *Oui dans certains cas, non dans d'autres.*

Oui si on l'utilise pour résoudre les problèmes à partir desquels il a été créé et pour certaines réalités physiques: le tableau, les champs, etc... *Non* pour certaines réalités physiques (le globe terrestre par exemple) ou pour des problèmes qui ne le concernent pas, qu'il n'a pas les moyens de traiter (angles, distances, etc...). Le plan affine est un outil abstrait "étudié pour" certains problèmes, trop grossier pour d'autres, ou sans rapport avec eux.

Un peu comme la théorie de la mécanique classique est un excellent modèle aux faibles vitesses, mais n'est plus satisfaisante à des vitesses proches de celles de la lumière, ou que la loi de la chute des corps est un bon modèle pour la chute d'une craie sur l'estrade, un mauvais pour celle d'un parachute; un peu aussi comme une carte d'état major est un bon modèle pour évaluer localement les distances alors qu'une planisphère construite sur le même principe est un modèle détestable *pour ces problèmes de distances*, mais convenable si on ne s'intéresse qu'aux problèmes de co-longitudinalité, etc...

Il est fondamental de remarquer que ce plan affine axiomatisé ne s'oppose en rien au plan intuitif: ce dernier, *selon les aspects qu'on en retient*, pourra être étudié à l'aide de divers modèles plus ou moins fins, utilisant diverses théories comportant plus ou moins *d'axiomes*.

En conséquence, on ne se dispensera jamais, lors de l'étude du plan affine (ou vectoriel, ou euclidien), *de multiplier les dessins représentations graphiques*: cela n'a rien d'impur, pourvu qu'on ne démontre pas *sur* le dessin, mais simplement *grâce* à lui. Le pouvoir de suggestion des figures en géométrie vient tout simplement du fait que les diverses structures ont été mises en place (entre autres) pour traduire, *formuler*, conceptualiser certaines propriétés de figures.

Il y a les mêmes différences et les mêmes liens entre:

le dessin qui permet de suivre les propriétés d'une relation binaire	et	l'énoncé formel de ces propriétés dans la théorie des ensembles
le dessin qui permet de voir qu'une fonction est continue ou dérivable ou croissante	et	la démonstration de ces propriétés à partir de définitions précises
le dessin 	et	"la base orthonormée $(\vec{k}, \vec{l})$ du plan vectoriel euclidien $\vec{E}$ se déduit de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ par une rotation d'angle θ "

V Compléments sur plan affine et vectoriel

On a donc défini axiomatiquement un modèle affine du plan $(E, \vec{E}, \phi\ )$ à partir de la structure d'espace vectoriel de dimension 2 .

Nous plaçant maintenant au *niveau du modèle*, on peut (mais toujours sur la base d'analogies et références au "passé") construire divers objets mathématiques associés à ce plan affine.

— l'ensemble $\vec{E} = E \times E/\mathcal{R}$ des classes de bipoints pour la relation d'équivalence

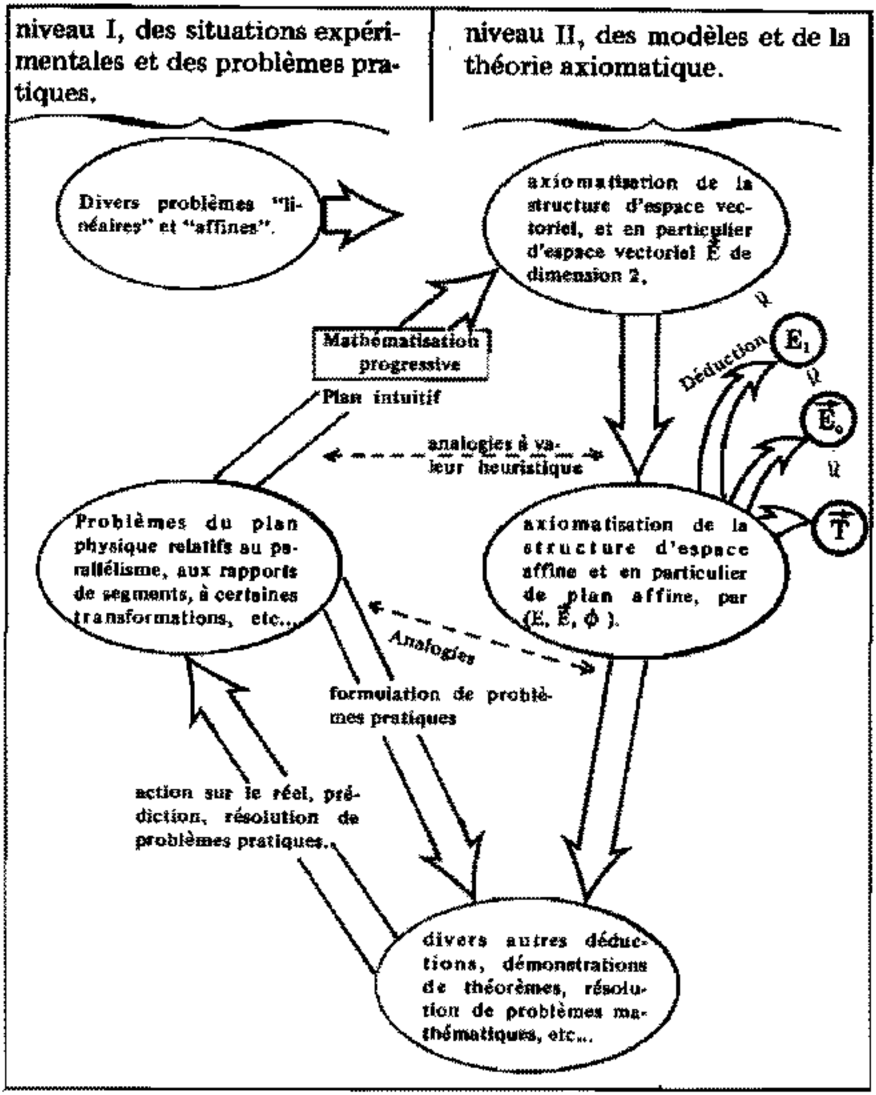
$$(A, B)\ \mathcal{R}\ (A', B') \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$$

— l'ensemble E_0 des bipoints d'origine O donnée dans E ;

— l'ensemble T des translations de E .

Ces divers ensembles, munis d'une addition et d'une multiplication externe naturellement définies à partir des opérations de E, sont des espaces vectoriels isomorphes à $\vec{E}$, comme l'intuition le laisse penser.

Si on résume (sur un graphique naturellement !) les diverses étapes envisagées,on obtient quelque chose du genre:



On a désigné ici par "mathématisation" une activité complexe de passage (progressif) du niveau I au niveau II et qui comprend plusieurs étapes qu'on n'analysera pas ici: la formulation des problèmes qui se posent, leur représentation ou symbolisation progressive, l'élaboration et le choix des notions les plus efficientes, etc...

Ce schéma est celui qui correspond à l'axiomatique affine $(E, \vec{E}, \phi)$. Il y en a d'autres. Par exemple, on aurait pu, *toujours à partir de la notion d'espace vectoriel*, définir un plan affine par analogie non avec les "vecteurs libres" du plan physique, mais avec les translations du plan physique. On aurait alors une définition telle que: ensemble E associé à un espace vectoriel $\vec{E}$ de dimension deux et tel que le groupe additif sous-jacent à $\vec{E}$ opère fidèlement et transitivement sur E; c'est-à-dire tel qu'il existe pour tout élément v de $\vec{E}$ une application de E dans E (qu'on peut noter $M \longmapsto t_v(M)$ ou $M \longmapsto M + v$), avec les deux propriétés

— $t_v \circ t_{v'} = t_{v+v'}$ *(groupe opérant dans E)*

— pour tout couple (A, B) d'éléments de E il existe $v \in \vec{E}$, v *unique* tel que $t_v(A) = B$ *(fidèlement et transitivement)*

A partir d'une telle définition axiomatique, on définit déductivement aisément les espaces vectoriels des classes de bipoints ou des bipoints d'origine donnée. Quant à $\vec{E}$, on l'appelle directement espace des translations de E.

On a deux modèles différents mais isomorphes.

VI Une axiomatique non vectorielle du plan affine

Les axiomatiques précédentes avaient ceci de commun qu'elles définissaient le plan affine essentiellement à partir de la structure d'espace vectoriel de dimension 2, la mathématisation correspondante ayant dégagé prioritairement les concepts de vecteur libre ou de translation.

Mais, pour cette même situation et ces mêmes types de problèmes, ce n'est pas la seule voie possible pour une axiomatisation intéressante.

Les programmes de quatrième nous en proposent une autre, qui n'utilise pas du tout la notion d'espace vectoriel (mais au contraire la retrouve au bout). La mathématisation utilise ici les notions primitives de point, de droite, d'intersection et de parallélisme de droites, et le corps des réels; la définition axiomatique proposée est du type suivant:

On appelle plan affine (réel) un ensemble d'éléments appelés points, contenant des sous-ensembles non vides et non pleins appelés droites, et tel que soient vérifiés

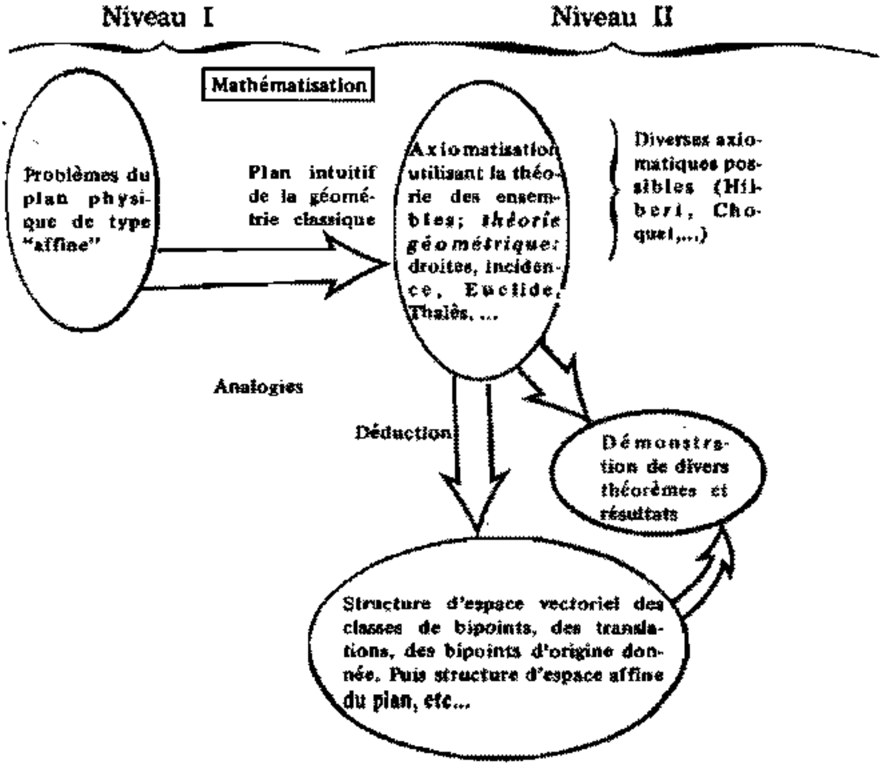
— l'axiome suivant lequel par deux points "passe" une droite et une seule;

— l'axiome d'Euclide;
— l'axiome de Thalès revu et corrigé.

Il s'agit d'une voie très différente; son avantage apparent est de serrer de plus près les notions primitives et le plan intuitif (axiome d'Euclide, etc...). On peut se demander si le jeu en vaut la chandelle: on axiomatise en effet ici une situation *dont le seul exemple familier ou présentant un intérêt pratique est le plan physique*: l'axiomatisation ayant avant tout pour fonction d'exprimer en une fois et sous une forme utilisable la substantifique moelle commune à des situations expérimentales différentes, on ne voit pas très bien ce qu'apporte, un siècle après Hilbert, la réédition (même très simplifiée) de son entreprise.

On peut surtout craindre que les élèves de quatrième ne manifestent pas une joie ardente face à ces constructions; l'expérience devrait permettre de trancher.

La graphique associé à cet échafaudage serait du type suivant:



En fait cela revient à introduire, par rapport au premier schéma, une étape supplémentaire: celle de *l'axiomatisation du plan intuitif* (au moins pour certaines de ses propriétés).

Il nous est maintenant possible de répondre à des questions telles que:le plan physique est-il affine ou euclidien ou ... ?

Il n'est rien de tout cela: *il est physique* et selon le type de problèmes qu'on y traite, on sera amené à utiliser un *modèle* mathématique affine ou euclidien ou riemannien, etc...

Pour une même réalité physique, divers modèles et diverses théories selon les questions ou selon le degré de finesse requis: voilà un premier point.

VII Situations, Modèles, Théories, Langages

En fait, pour être plus précis, il serait nécessaire de distinguer, au niveau II:
1) les modèlés associés à diverses situations expérimentales de type voisin et
2) la théorie unificatrice qui en traduit axiomatiquement les *principaux traits*, indépendamment du caractère spécifique de chaque modèle.

Ainsi, la *théorie des espaces affines* rassemble les axiomes fondamentaux utilisés dans l'étude déductive des *divers modèles affines* (droite, plan, applications, systèmes, etc...). La théorie des probabilités rassemble de même les axiomes de base communs à de multiples modèles (eux-mêmes associés à diverses expériences aléatoires concrètes).

De même pour la théorie des groupes, des espaces euclidiens, ou topologiques, de l'arithmétique, des fonctions analytiques, etc...

Qu'est-ce donc qu'une théorie ?

Sans entrer dans tous les détails on peut dire que c'est le couple formé par un langage L et un système A de formules de ce langage appelés axiomes de la théorie.

Un langage est un système formel de symboles et de lettres avec des règles de grammaire et de syntaxe qui en codifient l'emploi indépendamment de toute interprétation sémantique. En employant convenablement les règles de syntaxe d'un langage on construit des *formules* ou des *prédicats formels*.

Exemple: On appelle langage arithmétique tout langage construit suivant les "bonnes règles" à partir d'un ensemble V quelconque de lettres, d'un symbole fonctionnel (souvent noté 1) "de type 0", de deux symboles fonctionnels (souvent notés + et $\times$) "de type deux", et d'un symbole relationnel (souvent noté =) de type 2.

Une théorie sera donc un couple (L, A). Selon l'ensemble A choisi, une théorie pourra être contradictoire ou non contradictoire.

On appelle modèle d'une théorie (L, A) tout objet mathématique constitué d'ensembles, de fonctions et de relations qui "vérifient" les axiomes formels de A.

Ainsi $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, +)$ est un modèle de la théorie des groupes, comme $(\mathbf{R}^*, \bullet)$.

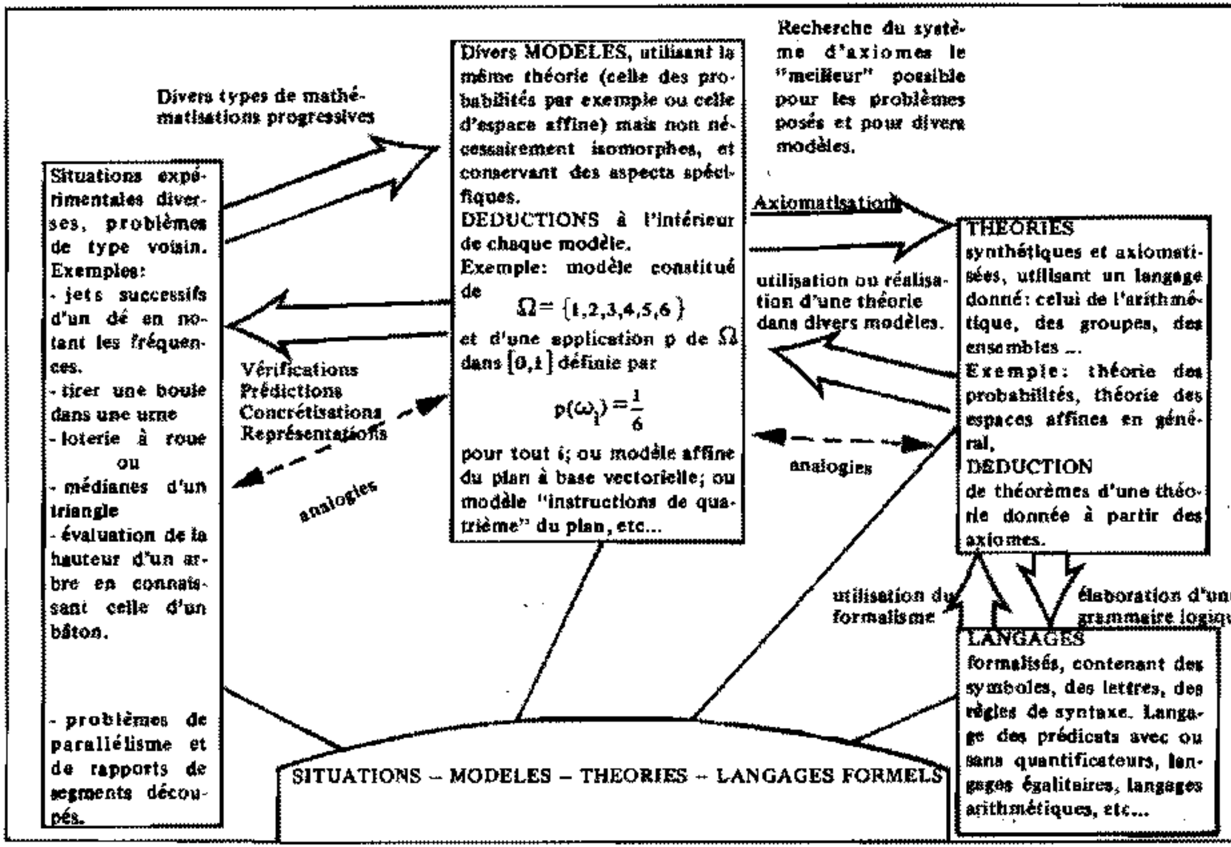
A une théorie donnée correspondent divers modèles, de même qu'un même modèle peut traduire certains aspects communs à une infinité de situations expérimentales distinctes.

Certaines théories sont telles que tous leurs modèles sont isomorphes: ainsi la théorie des groupes d'ordre n premier. D'autres non.

On peut définir des sous théories d'une théorie donnée.

Il n'y a pas vraiment coupure entre le concept de modèle et celui de théorie: toutefois, dans la pratique, le concept de modèle a un sens plus local, celui de théorie plus global.

Et puisque nous avons célébré les mérites des représentations graphiques et des diagrammes, nous vous proposons ce bouquet final:


Divers types de mathématisations progressives
Situations expérimentales diverses, problèmes de type voisin.
Exemples:
- jets successifs d'un dé en notant les fréquences.
- tirer une boule dans une urne
- loterie à roue
ou
- médianes d'un triangle
- évaluation de la hauteur d'un arbre en connaissant celle d'un bâton.
- problèmes de parallélisme et de rapports de segments découpés.
Vérifications
Prédictions
Concrétisations
Représentations
analogies
Divers MODELES, utilisant la même théorie (celle des probabilités par exemple ou celle d'espace affine) mais non nécessairement isomorphes, et conservant des aspects spécifiques.
DEDUCTIONS à l'intérieur de chaque modèle.
Exemple: modèle constitué de
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
et d'une application p de Ω dans $[0,1]$ définie par
$p(\omega_i) = \frac{1}{6}$
pour tout i; ou modèle affine du plan à base vectorielle; ou modèle "instructions de quatrième" du plan, etc...
Recherche du système d'axiomes le "meilleur" possible pour les problèmes posés et pour divers modèles.
Axiomatisation
utilisation ou réalisation d'une théorie dans divers modèles.
analogies
THEORIES
synthétiques et axiomatisées, utilisant un langage donné: celui de l'arithmétique, des groupes, des ensembles ...
Exemple: théorie des probabilités, théorie des espaces affines en général,
DEDUCTION
de théorèmes d'une théorie donnée à partir des axiomes.
utilisation du formalisme
élaboration d'une grammaire logique
LANGAGES
formalisés, contenant des symboles, des lettres, des règles de syntaxe. Langage des prédicats avec ou sans quantificateurs, langages égalitaires, langages arithmétiques, etc...
SITUATIONS – MODELES – THEORIES – LANGAGES FORMELS