Bulletin de l'APMEP n°289 - Juin 1973

2

DANS NOS CLASSES

Droite numérique

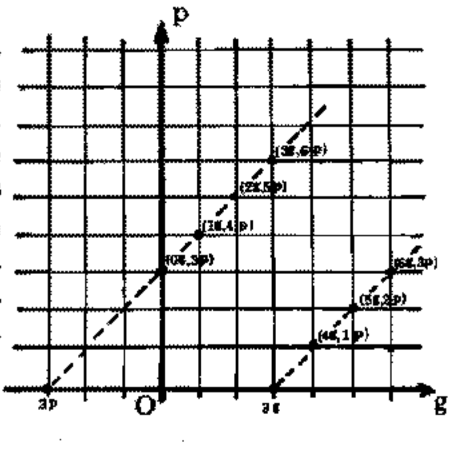
par J. VIBES (I.P.R., REIMS)

Je reviens dans cette note sur la représentation des nombres réels sur une droite pour préciser certains points.

1. En Sixième, on introduit l'ensemble Z (l'ensemble des décimaux si l'on veut, mais, en réalité, par changement d'unité, on pourra toujours se ramener à l'ensemble Z pour des décimaux d'un ordre maximal donné).

En considérant des gains et des pertes, on peut noter que les bilans $(6^g, 3^p)$, $(5^g, 2^p)$, $(4^g, 1^p)$, $(3^g, 0^p)$ par exemple sont équivalents — sans pour cela parler de $a + d = b + c$ qu'on pourra réserver à la Cinquième —. On peut repérer ces bilans dans un repère cartésien en portant les gains en abscisse, les pertes en ordonnée. On constate alors que ces bilans équivalents sont figurés par des points alignés et il apparaît aussitôt que tous ces bilans pourront être avantageusement remplacés par le bilan unique $(3^g, 0^p)$ qu'il est normal d'écrire 3^g et qui est figuré par un point de l'axe des abscisses.

De même, les bilans $(3^g, 6^p)$, $(2^g, 5^p)$, $(1^g, 4^p)$, $(0^g, 3^p)$ sont figurés par des points alignés et le bilan le plus simple remplaçant tous ces bilans équivalents est le bilan $(0^g, 3^p)$ qu'il est normal d'écrire 3^p et qui est figuré par un point de l'axe des ordonnées.



On peut prolonger la droite portant les points figuratifs de ces bilans équivalents jusqu'à son intersection avec l'axe des abscisses et noter 3^p le point obtenu.

On a ainsi gradué l'axe des abscisses et le point 0 seul ne sera pas affecté de la mention g ou p, puisqu'il représenter à la fois 0^g et 0^p.

Par la suite, on peut remplacer 3^g et 3^p par $(+3)$ et (-3) et, en Cinquième, faire le rapprochement avec la projection cylindrique:

Dans le plan, on considère deux droites concourantes x'Ox, y'Oy et, dans l'ensemble des points du plan, on considère la relation: "*avoir même projection sur* x'Ox *parallèlement à* y'y". Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont les classes d'équivalence ? Que peut-on prendre comme représentant simple d'une classe d'équivalence ?

A noter cependant que, pour construire l'ensemble **Z**, on n'a pas considéré tous les points du plan, mais seulement les points dont les coordonnées sont des naturels.

2. En Seconde, on peut faire un rapprochement analogue entre les *rationnels* et la projection centrale.

Soit un plan P, une droite D $(D \subset P)$ et un point O, $O \in D$. Dans $P - D$, on considère la relation $\mathfrak{R}$ définie par:

$$M \;\mathfrak{R}\; M' \iff O, M, M' \text{ sont sur une même droite.}$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Classes d'équivalence ? Que peut-on prendre comme représentant d'une classe d'équivalence ?

Considérons alors dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^{\star}$ la relation:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence définit un rationnel r:

$$r = \mathrm{Cl}(p, q) \;;$$

$\frac{p}{q}$ est une écriture du rationnel r.

Or, considérons les points M et M' définis par:

$$\overrightarrow{OM} = p\vec{i} + q\vec{j}$$

$$\overrightarrow{OM'} = p'\vec{i} + q'\vec{j}$$, où $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

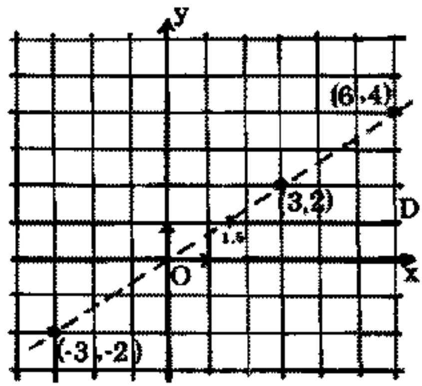
$$\overrightarrow{ON} = q' \,.\, \overrightarrow{OM} = p\,q'\vec{i} + q\,q'\vec{j}$$
$$= p'\,q\,\vec{i} + q\,q'\vec{j} = q\,(p'\vec{i} + q'\vec{j}) = q.\overrightarrow{OM'}$$

Les points O, M, M', dans l'hypothèse $pq' = p'q$, sont alignés sur la droite ON.

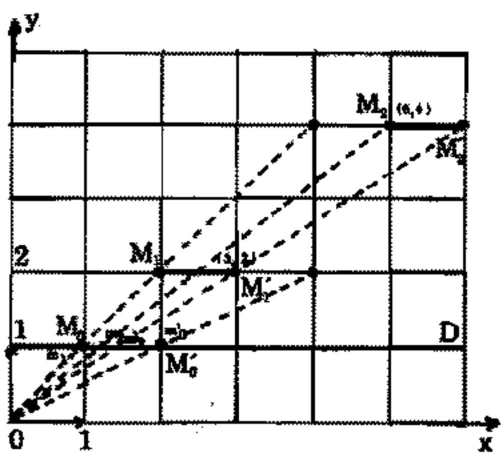
Les couples équivalents à (p, q) sont donc figurés par des points alignés, mais au lieu de représenter tous ces couples équivalents par un point figurant un couple particulier, prenons l'intersection de la droite ON avec la droite D: $y = 1$. Nous dirons que le point obtenu figure le rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ sur la droite D sur laquelle on a choisi le repère (A, B), A et B étant les points représentatifs des couples (0, 1) et (1, 1).

Les couples équivalents à (a, 1), ($a \in \mathbb{Z}$) sont représentés par le point de coordonnées (a, 1), c'est-à-dire le point d'abscisse a sur D.

On retrouve ainsi les images des entiers sur D. (Il faudra justifier l'assimilation du rationnel $\dfrac{a}{1}$ à l'entier a).



3. Passons à l'ensemble R.



Supposons, par exemple, qu'on figure sur D les rationnels $\frac{p}{2^n}$ et $\frac{p+1}{2^n}$ images des couples $(p, 2^n)$ et $(p+1, 2^n)$ et dont les carrés encadrent 2 lorque n décrit $\mathbf{N}$.

On obtient, pour $n = 0$, $p = 1$: $1^2 < 2 < 2^2$

Or, $1 = \frac{2}{2}$, $2 = \frac{4}{2}$. Sur la droite $y = 2$ s'introduit un point supplémentaire (3, 2): $$\left(\frac{2}{2}\right)^2 < 2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Or $\frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ et $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$. Sur $y = 4$ s'introduit un point supplémentaire (5, 4), etc...

Les projections centrales, à partir de O, des segments $[M_0 M'_0]$, $[M_1 M'_1]$, ..., $[M_n M'_n]$ — avec $M_n(p, 2^n)$ et $M'_n(p+1, 2^n)$ — sont des segments emboîtés dont la longueur tend vers 0.

Si m_n et m'_n sont les projections centrales sur D de M_n et M'_n, les suites de points:

$$n \longmapsto m_n \quad \text{et} \quad n \longmapsto m'_n \qquad (n \in \mathbf{N})$$

définissent un même point m de D, image de $\sqrt{2}$.