Sur le polynome $S_n(x)$

par E. EHRHART (Strasbourg)

L'entier r étant positif ou nul, nous allons établir pour ce polynome une relation de récurrence qui répond à une triple fin: les former facilement de proche en proche, en donner des propriétés, fournir la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique quelconque.

Formule de récurrence

La relation

$$S_r(n) - S_r(n-1) = n^r \tag{1}$$

montre que $S_r(n)$ est un polynome de degré $r+1$ *sans terme constant*, dont elle permettrait de calculer les coefficients.

Par dérivation, on obtient pour $r \neq 0$:

$$S_r'(n) - S_r'(n-1) = r\,n^{r-1} = r\,[S_{r-1}(n) - S_{r-1}(n-1)]$$

ou

$$S_r'(n) - r\,S_{r-1}(n) = S_r'(n-1) - r\,S_{r-1}(n-1)$$

Le polynome $S_r'(n) - r\,S_{r-1}(n)$ a donc une période 1 et par suite est constant:

$$S_r'(n) = r\,S_{r-1}(n) + c\,.$$

D'où, en intégrant de 0 à n les deux membres, et en tenant compte de $S_r(0) = 0$,

$$S_r(n) = r\int_0^n S_{r-1}(n)\,dn + c\,n.$$

Or

$$S_r(1) = 1 = r\int_0^1 S_{r-1}(n)\,dn + c$$

en sorte que

$$(2) \qquad S_r(n) = r\int_0^n S_{r-1}(n)\,dn + n\,[1 - r\int_0^1 S_{r-1}(n)\,dn]\ ^{*}$$

D'où la règle:

Pour passer de S_{r-1} à S_r on intègre sans constante additive, on multiplie par r, et on complète par un terme en n tel que la somme des coefficients soit égale à 1.

Expressions explicites de $S_r(n)$

A partir de $S_0(n) = n$, on trouve ainsi successivement

$$S_1 = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

$$S_2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

$$S_3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$S_4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

$$S_5 = \frac{n^6}{6} + \frac{n^5}{2} + \frac{5n^4}{12} - \frac{n^2}{12}$$

$$S_6 = \frac{n^7}{7} + \frac{n^6}{2} + \frac{n^5}{2} - \frac{n^3}{6} + \frac{n}{42}$$

$$S_7 = \frac{n^8}{8} + \frac{n^7}{2} + \frac{7n^6}{12} - \frac{7n^4}{24} + \frac{n^2}{12}$$

Propriétés du polynome $S_r(n)$

1) Pour $r > 1$, le polynome $S_r(n)$ débute par

$$\frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{r\,n^{r-1}}{12} + 0\,.\,n^{r-2}$$

* J'ignore si cette formule est connue, mais je sais que les *polynomes de Bernoulli* $S_r(n)$ vérifient une relation analogue plus ou moins classique

$$S_r(n) = r\int_0^n S_{r-1}(n)\,dn + r\,n\int_0^1 S_{r-1}(n)\,dn$$

Démontrons-le par récurrence. Pour r de 2 à 7, on le constate sur les expressions explicites. Soit alors

$$S_{r-1}(n) = \frac{n^r}{2} + \frac{n^{r-1}}{2} + \frac{(r-1)\,n^{r-2}}{12} + P(n)$$

le polynome P(n) étant de degré $r-4$. D'où

$$r\int_0^n S_{r-1}(n)\,dn = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{r\,n^{r-1}}{12} + Q(n)$$

le polynome Q(n) étant de degré $n-3$. D'après (2) le $S_r(n)$ a donc bien la propriété annoncée.

2) $S_r(n)$ est de la forme $P\,S_1$ (P étant un polynome)

Comme $S_r(0) = 0$, n est en facteur dans $S_r(n)$. Or pour $n = 0$, l'identité polynomiale (1) devient $S_r(0) = S_r(-1) = 0$. On peut donc mettre en facteur dans $S_r(n)$ le $n+1$ et par suite le $\frac{n(n+1)}{2} = S_1$. En particulier:

$$S_2 = \frac{2n+1}{3}\,S_1$$

$$S_3 = \frac{n(n+1)}{2}\,S_1$$

$$S_4 = \frac{(2n+1)(3n^2+3n-1)}{15}\,S_1$$

$$S_5 = \frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{6}\,S_1$$

$$S_6 = \frac{(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{21}\,S_1$$

$$S_7 = \frac{n(n+1)(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{12}\,S_1$$

Somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique

Désignons par $F_r(X, Y)$ le polynome $S_r(n)$ dans lequel on a remplacé n par X et la variable d'homogénéité par Y. Ainsi

$$F_2(X, Y) = \frac{X(X+Y)(2X+Y)}{6}$$

Dans le Bulletin n° 223 (page 318, juin 1962) nous avons montré que

$$a^r + (a+h)^r + (a+2h)^r + \ldots + \ell^r = \frac{1}{h}\left[F_r(\ell, h) - F_r(a-h, h)\right]$$

Par exemple

$$a^2 + (a+h)^2 + (a+2h)^2 + \ldots + \ell^2 = \frac{1}{6h}\left[\ell(\ell+h)(2\ell+h) - (a-h)a(2a-h)\right]$$

3) Pour $r \neq 1$, $S_r(n)$ est de la forme PS_2 ou PS_1^2, suivant que r est pair ou impair.
L'identité polynomiale (1) permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_r(0) - S_r(-1) &= 0 \\ S_r(-1) - S_r(-2) &= (-1)^r \\ S_r(-2) - S_r(-3) &= (-2)^r \\ &\ldots\ldots\ldots \\ S_r(-n+1) - S_r(-n) &= (-n+1)^r \\ S_r(-n) - S_r(-n-1) &= (-n)^r \end{aligned}$$

Par addition membre à membre, on obtient

$$(3) \qquad -S_r(-n-1) = (-1)^r S_r(n)$$

La même addition donne, en supprimant la dernière égalité

$$-S_r(-n) = (-1)^r S_r(n-1) \quad \Rightarrow \quad (-1)^{r+1} S_r(-n) = S_r(n) - n^r$$

ou

$$(4) \qquad S_r(n) + (-1)^r S_r(-n) = n^r$$

Pour r pair et $n = \frac{1}{2}$, (3) donne $S(-\frac{1}{2}) = 0$. Donc $S_r(n)$ est divisible par $2n+1$ et aussi, d'après 2), par $n(n+1)$ et par suite par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = S_2$.

Pour r impair, (4) montre que n^r est la seule puissance d'exposant impair dans $S_r(n)$ et donc, pour $r \neq 1$, ce polynome est divisible par n^2, ce qui entraîne $S_r(0) = S_r'(0)$. Il s'ensuit que

$S_r(-1) = S'_r(-1) = 0$, car

$$S_r(n) - S_r(n-1) = n^r \implies S'_r(n) - S'_r(n-1) = r\,n^{r-1}$$

qui montre que $S_r(n)$ est divisible également par $(n+1)^2$ et donc par $\left[\dfrac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 = S_1^2$

4) Dans $S_r(n)$ les exposants de toutes les puissances autres que n^r ont la parité de $r+1$.

Conséquence immédiate de (4).

Remarque

Il existe une formule classique exprimant $S_r(n)$ au moyen des nombres B_k de Bernoulli* . Nous lui donnons la forme concise

$$S_r(n-1) = \frac{(B+n)^{(r+1)} - B^{(r+1)}}{r+1} \quad ; \qquad B^k := B_k$$

qui signifie que dans le numérateur développé il faut remplacer toute puissance de B^k par B_k .

Ou encore

$$S_r = \int_0^{n+1} (X+B)^{(r)}\, dX$$

la puissance symbolique signifiant encore que dans le résultat B_k remplace B^k** . (Dans les deux formules on suppose $r \neq 0$).

---

* Voir par exemple Guelfond, "Calcul des différences finies", page 251.

** Voici les premières valeurs de B_k :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_k	1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$\frac{-1}{30}$