Une théorie utilitaire de l'intégrale double

par G. HEUZE (Université de Toulouse)

INTRODUCTION

Les théories traditionnelles de l'intégrale double telles qu'on les enseigne dans le premier cycle sont d'une exposition délicate : ou bien on escamote les difficultés (ce qui provoque toujours certains malaises), ou bien on procède avec rigueur et c'est très long (or il n'est guère justifié d'y consacrer beaucoup de temps car des théories plus puissantes seront étudiées en deuxième cycle). Par ailleurs les deux résultats importants pour le calcul effectif de l'intégrale (FUBINI et GREEN — RIEMANN) ne sont obtenus que par des procédés détournés.

La théorie présentée ici prend GREEN — RIEMANN comme point de départ. Bien qu'étant un peu moins puissante que les théories habituelles, elle recouvre largement tous les cas rencontrés dans la pratique (c'est-à-dire l'intégration sur les compacts à bords des fonctions continues).

RAPPELS

Aussitôt après l'intégrale d'une fonction réelle de variable réelle et les courbes paramétrées du plan, on étudie l'intégrale curviligne $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, où γ est un arc de classe C^1 par morceaux (c'est-à-dire un arc continu à dérivée continue par morceaux) et P, Q deux fonctions continues réelles définies sur un ouvert A du plan contenant le support de γ.

On montre en particulier dans cette étude :

(1) *Si P_1, Q_1, P_2, Q_2 sont à dérivées partielles* $\frac{\partial P_1}{\partial y}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$, $\frac{\partial P_2}{\partial y}$, $\frac{\partial Q_2}{\partial x}$ continues sur A *étoilé, γ un arc fermé de support contenu dans* A, *alors*

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} \text{ \textit{entraîne} }$$
$$\int_\gamma P_1\,dx + Q_1\,dy = \int_\gamma P_2\,dx + Q_2\,dy$$

PRESENTATION DE LA THEORIE

Précisons d'abord nos notations :

. f fonction continue réelle définie sur A ouvert étoilé du plan ;

. K compact à bord contenu dans A ;

. b (K) bord de K (c'est un arc fermé de classe C^1 par morceaux orienté comme sur la figure 1).

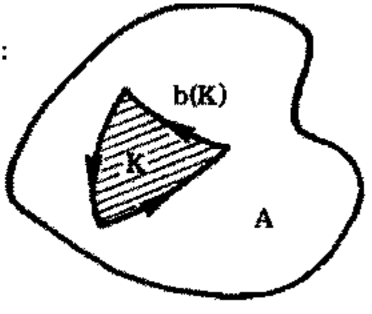

Fig. 1

La théorie qui va suivre utilise la remarque suivante :

(2) *Il existe au moins un couple* (P, Q) *de fonctions continues réelles définies sur* A *à dérivées partielles* $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ *continues et telles que* $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$

Pour s'en convaincre il suffit par exemple, A ayant une morphologie comme sur la figure 2, de prendre $P = 0$ et $Q(x,y) = \int_\alpha^x f(t,y)\,dt$.

Il est immédiat de vérifier que les fonctions P et Q ainsi définies ont les propriétés annoncées.

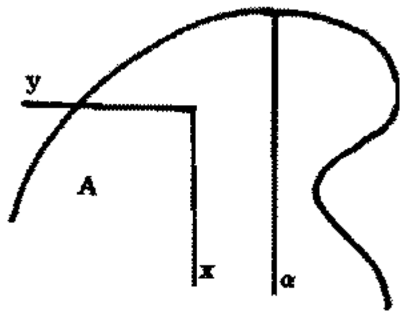

Fig. 2

Si A a une morphologie différente on pourra prendre $P(x,y) = -\int_\beta^y f(x,t)\,dt$ et $Q = 0$, ou bien on procédera à des "recollements" après avoir découpé A "en tranches" (les fonctions P et Q supportent très bien ces recollements comme on le vérifie aisément) ; d'ailleurs ces situations sont tout à fait exceptionnelles en pratique.

La remarque (2) étant acquise, on peut poser :

Définition — On appelle intégrale double de f *sur* K *(notée* $\iint_K f$*) le réel* $\int_{b(K)} P\,dx + Q\,dy$, *où* P *et* Q *sont telles que* $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f$.

Cette définition est en effet justifiée du fait de (1) et de (2), (1) nous permettant d'affirmer que $\int_{b(K)} P\,dx + Q\,dy$ ne dépend que de f et de K.

Les résultats classiques de la théorie s'obtiennent alors très vite :

(3) *Linéarité de l'intégrale*

$$\iint_K (f+g) = \iint_K f + \iint_K g \quad \text{et} \quad \iint_K \lambda f = \lambda \iint_K f$$

En effet $(P+R\,,\ Q+S)$ (resp. $(\lambda P, \lambda Q)$) est associé à $f+g$ (resp. λf) si (P, Q) est associé à f et (R, S) à g.

(4) *Continuité de l'intégrale*

Si une suite de fonctions continues f_n définies sur A converge uniformément vers f, les $Q_n(x, y) = \int_\alpha^x f_n(t, y)\,dt$ convergent vers $Q(x, y) = \int_\alpha^x f(t, y)\,dt$ uniformément sur toute partie bornée de A et on a donc $\iint_K \lim f_n = \lim \iint_K f_n$.

(5) (Fubini) *Avec les notations précisées sur la figure 3*

$$\iint_K f = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy$$

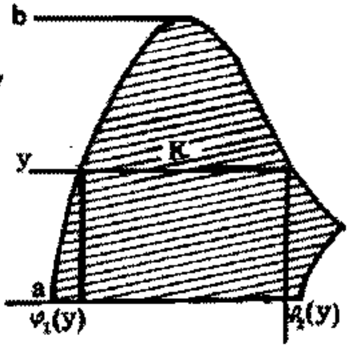

Fig. 3

C'est une conséquence immédiate de la définition.

(6) *Si* $f \leqslant g$ *alors* $\iint_K f \leqslant \iint_K g$

Il résulte en effet de Fubini que $f \geqslant 0$ entraîne $\iint_K f \geqslant 0$ (car $\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$ et $a \leqslant b$).

(7) $\left| \iint_K f \right| \leqslant \iint_K |f| \leqslant \sup_K |f| \iint_K 1$

C'est une conséquence de (6) et de $f \leqslant |f| \leqslant \sup_K |f|$

(8) *Si* $K_1 \cap K_2$ *est contenu dans le support de leurs bords* (fig. 4) (*en particulier si* $K_1 \cap K_2 = \phi$), *alors*

$$\iint_{K_1 \cup K_2} f = \iint_{K_1} f + \iint_{K_2} f$$

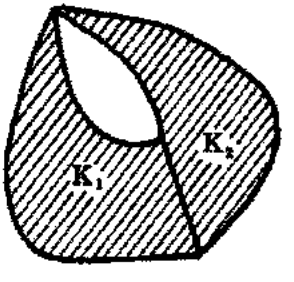

Fig. 4

Cela résulte immédiatement de la définition et des propriétés de l'intégrale curviligne.

CONCLUSION

La théorie ci-dessus (bien que n'étant pas "naturelle", il faut en convenir) présente les avantages suivants :

— elle peut être exposée rapidement en premier cycle ;
— elle est rigoureuse (n'escamotant aucune difficulté) ;
— elle met en lumière les techniques utiles pour le calcul effectif des intégrales.

J'ajoute que c'est ainsi que je l'ai présentée pendant quelques années aux étudiants d'Orléans (en MP 2).