

1

ÉTUDES

Déterminant d'une relation binaire

par J. CHACRON (Faculté des Sciences, Amiens)

Dans [1], GLAYMANN associe à chaque relation binaire une *matrice booléenne*. Lorsqu'une relation a même source que but, nous lui associons le *déterminant* de la matrice associée pour une numérotation des éléments de la source.

Nous montrerons, après avoir rappelé les principaux résultats d'une théorie des déterminants dans un anneau commutatif (voir par exemple [2]), que le déterminant est *indépendant* de la numérotation choisie, que le déterminant d'une relation d'*ordre* (resp. d'une relation d'*équivalence*, différente de la relation d'égalité) est 1 (resp. 0).

1. Principaux résultats d'une théorie des déterminants dans un anneau commutatif

Nous supposons dans toute la suite que A est un anneau commutatif unitaire; 0 est élément neutre pour l'addition, 1 est élément neutre pour la multiplication.

$$M = \left(a_i^j \right)_{\substack{i=1,2,\dots,n \\ j=1,2,\dots,n}}$$

désigne une matrice à éléments dans A .

La ligne " i " de la matrice M est la suite ordonnée

$$\left(a_i^j \right)_{j=1,2,\dots,n}$$

S_n désigne le *groupe symétrique d'ordre* n (ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$).

Si $s \in \mathcal{S}_n$, $e(s)$ désigne la *signature* de s , et posons :

$$\mathcal{E}(s) = 1 \quad \text{si} \quad e(s) = 1 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(s) = -1 \quad \text{si} \quad e(s) = -1.$$

Cela étant dit, $\det(M)$ est défini par :

$$\det(M) = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \mathcal{E}(s) a_1^{s(1)} a_2^{s(2)} \dots a_n^{s(n)}$$

On montre que

Proposition 1

Si M^* est la matrice transposée de M , alors $\det(M) = \det(M^*)$.

On définit également une application du module $(A^n)^n$ vers A par :

si $L_i = (a_i^j)_{j=1,2,\dots,n}$, pour $i=1, 2, \dots, n$, est une suite de n éléments de A^n , si M est la matrice $(a_i^j)_{i=1,2,\dots,n}$ formée par les n lignes considérées, on pose :

$$\det(L_1, L_2, \dots, L_n) = \det(M)$$

et on montre alors que

Proposition 2

L'application

$$(L_1, L_2, \dots, L_n) \longrightarrow \det(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

est une application multilinéaire de $(A^n)^n$ vers A (c'est-à-dire linéaire du module A^n vers A , par rapport à chaque variable).

Proposition 3

L'application

$$(L_1, L_2, \dots, L_n) \longrightarrow \det(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

est alternée

(c'est-à-dire que $[i \neq j] \text{ et } L_i = L_j \implies \det(L_1, L_2, \dots, L_n) = 0$).

Corollaire 1

Une matrice qui a deux colonnes (resp. lignes) identiques a un déterminant nul.

Corollaire 2

Si $M' = (b_i^j)_{i=1,2,\dots,n}$ est une matrice à éléments dans

A, et si MM' est la matrice de terme général c_k^r défini par:

$$c_k^r = \sum_{j=1}^n a_k^j b_j^r$$

alors $\det(MM') = \det(M) \det(M')$.

Corollaire 3

On a $\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_i^j \Delta_i^j$

où Δ_i^j désigne le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans M la ligne i et la colonne j .

Corollaire 4

Si $\det(M)$ est inversible, M est inversible dans l'anneau des matrices d'ordre n sur A , et si b_i^j désigne le terme général de la matrice inverse, on a:

$$b_i^j = (\det(M))^{-1} (-1)^{j+i} \Delta_i^j$$

où Δ_i^j est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans M la ligne j et la colonne i .

Ainsi, les règles de calcul sont les mêmes pour un déterminant à coefficients réels ou complexes, sauf qu'ici pour faire les calculs, il faut tenir compte des tables d'addition et de multiplication dans A . En particulier, si l'anneau A est de caractéristique 2 (c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, $x + x = 0$), ce qui est le cas de l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et plus généralement pour les puissances de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $1 + 1 = 0$, soit $-1 = 1$. Il en résulte que le déterminant d'une matrice est invariant pour toute permutation sur l'ensemble des colonnes ou sur l'ensemble des lignes de la matrice.

2. Matrice associée à une relation binaire

Dans toute la suite, E désigne un ensemble fini à n éléments.

Définition

$B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E , si $B \in E^n$, tel que $i \neq j$ entraîne $x_i \neq x_j$.

Il est clair que l'ensemble E admet $n!$ bases.

Si \mathcal{R} est une relation de E vers E (c'est-à-dire une partie de $E \times E$), alors nous désignerons par $M_n(\mathcal{R})$ la matrice d'ordre n dont le

terme général a_i^j est défini par

$$a_i^j = 1 \quad \text{si } (x_i, x_j) \in \mathcal{R}$$

et $a_i^j = 0$ si $(x_i, x_j) \notin \mathcal{R}$

Il est clair que la matrice $M_B(\mathcal{R})$ dépend de \mathcal{R} et de B et que pour la même relation \mathcal{R} , pour deux bases B et B' , on peut avoir $M_B(\mathcal{R}) \neq M_{B'}(\mathcal{R})$

Proposition 4

Si \mathcal{R} et \mathcal{S} sont deux relations de E vers E , si B est une base de E , si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ est la relation composée de \mathcal{R} avec \mathcal{S} , si $M_B(\mathcal{R})$ a pour terme général a_i^j et $M_B(\mathcal{S})$ a pour terme général b_i^j , alors la matrice $M_B(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$ a pour terme général c_i^j tel que

$$c_i^j = 1 \quad \text{si il existe un naturel } k \text{ tel que } a_i^k = b_k^j = 1$$

et $c_i^j = 0$ si pour tout naturel k , $a_i^k = 0$ ou $b_k^j = 0$

Démonstration

En effet, si d_i^j désigne le terme général de la matrice $M_B(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})$, montrons que $d_i^j = c_i^j$. Pour cela, il suffit d'établir que

$$d_i^j = 1 \quad \text{si et seulement si } c_i^j = 1$$

Supposons à cet effet que $d_i^j = 1$. Alors $(x_i, x_j) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$. Il existe donc $x_k \in E$ tel que

$$(x_i, x_k) \in \mathcal{R} \quad \text{et } (x_k, x_j) \in \mathcal{S}$$

Ce qui signifie que $a_i^k = b_k^j = 1$ et que $c_i^j = 1$.

Supposons réciproquement que $c_i^j = 1$. Par définition, il existe un naturel k tel que $a_i^k = b_k^j = 1$, donc

$$(x_i, x_k) \in \mathcal{R} \quad \text{et } (x_k, x_j) \in \mathcal{S},$$

c'est-à-dire que

$$(x_i, x_j) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S} \quad \text{et } d_i^j = 1.$$

Définition

Posons

$$M_B(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) = M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(\mathcal{S})$$

où le second membre est la matrice dont le terme général est c_i^j défini dans la proposition 4.

Remarques

- 1- Comme $M_B(\mathcal{R}) = M_B(\mathcal{S})$ si et seulement si $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ et en tenant compte de l'associativité de la loi de composition

$$(\mathcal{R}, \mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$$

dans le demi-groupe $\mathcal{F}(E \times E)$, il est clair que

$$[M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(\mathcal{S})] \circ M_B(\mathcal{T}) = M_B(\mathcal{R}) \circ [M_B(\mathcal{S}) \circ M_B(\mathcal{T})]$$

pour toutes relations \mathcal{R} , \mathcal{S} et \mathcal{T} de E vers E .

- 2- En général, le produit $M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(\mathcal{S})$ est différent du produit matriciel $M_B(\mathcal{R}) M_B(\mathcal{S})$ défini au paragraphe 1.
- 3- Cependant, il existe des cas remarquables où ces deux produits sont égaux.

Proposition 5

Si $M_B(\mathcal{R})$ contient au plus un terme égal à 1 par ligne ou si $M_B(\mathcal{S})$ contient au plus un terme égal à 1 par colonne, alors

$$M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(\mathcal{S}) = M_B(\mathcal{R}) M_B(\mathcal{S})$$

Démonstration

Désignons respectivement par c_i^j et d_i^j les termes généraux des matrices des deux membres de l'égalité à démontrer.

1. Chaque ligne de $M_B(\mathcal{R})$ a au plus un terme égal à 1.

Si $c_i^j = 1$, alors il existe un naturel k tel que $a_i^k = b_k^j = 1$.

Par conséquent pour $r \neq k$,

$$a_i^r = 0 \quad \text{et} \quad d_i^j = \sum_{r=1}^n a_i^r \cdot b_r^j = 1$$

Donc $d_i^j = 1$.

Si $c_i^j = 0$, pour tout naturel k , le produit $a_i^k b_k^j$ est nul.

Donc

$$d_i^j = \sum_{k=1}^n a_i^k b_k^j = 0$$

2. Chaque colonne de $M_B(\mathcal{S})$ a au plus un terme égal à 1.

Si $c_i^j = 1$, alors il existe un naturel k tel que $a_i^k = b_k^j = 1$.

En particulier, pour tout naturel $r \neq k$, $b_r^j = 0$. Par suite

$$d_i^j = \sum_{r=1}^n a_i^r b_r^j = 1$$

Si $c_j^i = 0$, pour tout naturel k , $a_i^k = 0$ ou $b_k^j = 0$.
Donc

$$a_i^k b_k^j = 0, \quad \text{et} \quad d_i^j = \sum_{k=1}^n a_i^k b_k^j = 0$$

Corollaire 1

Si \mathcal{R} est une application (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, il existe un et un seul $x' \in E$, tel que $(x, x') \in \mathcal{R}$, alors l'hypothèse de la proposition 5 est vérifiée.

Corollaire 2

Si \mathcal{S} est une application injective, alors l'hypothèse de la proposition 5 est encore vérifiée.

Corollaire 3

En particulier, si f est une bijection de E , alors pour toute relation \mathcal{R} de E vers E

$$M_B(f) \circ M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(f) = M_B(f) M_B(\mathcal{R}) M_B(f)$$

et si f^{-1} désigne la bijection réciproque de f , alors

$$M_B(f) \circ M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(f^{-1}) = M_B(f) M_B(\mathcal{R}) M_B(f^{-1})$$

Corollaire 4

Si f est une bijection de E , alors

$$M_B(f) \circ M_B(f^{-1}) = M_B(f) M_B(f^{-1})$$

En désignant par I_n la matrice unité d'ordre n , on a encore

$$M_B(f) \circ M_B(f^{-1}) = M_B(f \circ f^{-1}) = I_n$$

Il en résulte que

$$M_B(f) M_B(f^{-1}) = I_n$$

3. Changement de base

B et B' désignent deux bases de E ; proposons-nous de trouver une relation entre les matrices $M_B(\mathcal{R})$ et $M_{B'}(\mathcal{R})$.

Posons $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$

Il existe une bijection f de E vers E , telle que

$$\text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \quad x'_i = f(x_i)$$

Définition

Si $B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $B' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ sont deux bases de E (prises dans cet ordre), la bijection changement de base est l'application

$$f : \begin{array}{l|l} E & \rightarrow E \\ \hline x_i & \rightarrow x'_i \end{array}$$

Proposition 6*

Si B et B' sont deux bases de E , si f est la bijection changement de base et si \mathcal{R} est une relation de E vers E , alors

$$M_{B'}(\mathcal{R}) = M_B(f \circ \mathcal{R} \circ f^{-1})$$

Démonstration

Désignons par a_i^j le terme général de la matrice $M_{B'}(\mathcal{R})$ et par b_i^j celui de la matrice $M_B(f \circ \mathcal{R} \circ f^{-1})$.

Si $a_i^i = 1$, alors par définition $(x'_i, x'_i) \in \mathcal{R}$.

Soit encore $(f(x_i), f(x_i)) \in \mathcal{R}$.

Donc

$$(x_i, f(x_i)) \in f \quad \text{et} \quad (f(x_i), x_i) \in f^{-1}$$

Par conséquent

$$(x_i, x_i) \in f \circ \mathcal{R} \circ f^{-1}$$

d'où $b_i^i = 1$.

Si $b_i^i = 1$, alors par définition $(x_i, x_i) \in f \circ \mathcal{R} \circ f^{-1}$. Donc

$$(x_i, f(x_i)) \in f, \quad (f(x_i), f(x_i)) \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad (f(x_i), x_i) \in f^{-1}$$

En particulier $(f(x_i), f(x_i)) \in \mathcal{R}$,

donc

$$(x'_i, x'_i) \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad a_i^i = 1$$

Par conséquent les deux matrices considérées sont égales.

Corollaire

D'après la proposition 4, on a aussi

$$M_{B'}(\mathcal{R}) = M_B(I) \circ M_B(\mathcal{R}) \circ M_B(f^{-1})$$

* Cette proposition a été mise au point au cours d'une séance de travaux pratiques de l'unité: Théorie Générale des Structures, et sur une idée de notre élève Bernadette Caruyer.

D'après la proposition 5, et compte tenu que f est une bijection

$$M_{B'}(\mathcal{R}) = M_B(f) M_B(\mathcal{R}) M_B(f^{-1}) .$$

4. Déterminant d'une relation binaire

Définition

Si B est une base de E et si \mathcal{R} est une relation de E vers E , alors $\det_B(\mathcal{R})$ désigne conformément à la définition du paragraphe 1, le déterminant de la matrice $M_B(\mathcal{R})$.

Théorème 1

Le déterminant d'une relation est invariant par changement de base.

Démonstration

B et B' désignent deux bases de E . Démontrons que

$$\det_{B'}(\mathcal{R}) = \det_B(\mathcal{R})$$

Si f est la bijection changement de base alors la proposition 6 conduit à:

$$M_{B'}(\mathcal{R}) = M_B(f) M_B(\mathcal{R}) M_B(f^{-1})$$

D'après la proposition 3, corollaire 2, il vient:

$$\det_{B'}(\mathcal{R}) = \det_B(f) \det_B(\mathcal{R}) \det_B(f^{-1})$$

Comme l'anneau A est commutatif, il vient:

$$\det_{B'}(\mathcal{R}) = \det_B(f) \det_B(f^{-1}) \det_B(\mathcal{R})$$

D'après le même corollaire de la proposition 3 et la proposition 5, corollaire 4, il vient:

$$\begin{aligned} \det_{B'}(\mathcal{R}) &= \det(I_n) \det_B(\mathcal{R}) \\ &= 1 \det_B(\mathcal{R}) \\ &= \det_B(\mathcal{R}) \end{aligned}$$

Nous pouvons désormais poser:

$$\det(\mathcal{R}) = \det_B(\mathcal{R})$$

où B est une base quelconque de E .

Remarques

- 1- Il est facile de vérifier qu'en général pour deux relations quelconques \mathcal{R} et \mathcal{S} .

$$\det (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \neq \det (\mathcal{R}) \det (\mathcal{S})$$

2- Il existe des cas où

$$\det (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) = \det (\mathcal{R}) \det (\mathcal{S})$$

Proposition 7

Si \mathcal{R} est une fonction (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in E$, il existe au plus un $x' \in E$ tel que $(x, x') \in \mathcal{R}$) ou si \mathcal{S} est une fonction injective, alors

$$\det (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) = \det (\mathcal{R}) \det (\mathcal{S})$$

Démonstration

Si \mathcal{R} est une fonction et si B est une base de E , alors la matrice $M_B(\mathcal{R})$ a au plus un élément égal à 1 par ligne; dans ce cas et compte-tenu de la proposition 5:

$$M_B(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) = M_B(\mathcal{R}) M_B(\mathcal{S})$$

D'après la proposition 2, corollaire 3, il vient:

$$\det (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) = \det (\mathcal{R}) \det (\mathcal{S})$$

On a de même le même résultat si \mathcal{S} est une fonction injective. Cela achève la démonstration de la proposition 7.

Nous allons maintenant donner quelques exemples remarquables de calcul de déterminant d'une relation binaire lorsque cette relation est soit une application, soit une relation d'ordre, soit une relation d'équivalence.

Proposition 8

Si f est une application de E vers E , $\det (f) \neq 0$ si et seulement si f est injective.

1) Supposons que $\det (f) \neq 0$

B désigne une base de E et supposons que pour deux naturels i et j tels que $i \neq j$, $f(x_i) = f(x_j)$.

En posant $f(x_i) = f(x_j) = x_k$, il vient

$$(x_i, x_k) \in \mathcal{R} \quad \text{et} \quad (x_j, x_k) \in \mathcal{R}$$

Si a_i^j désigne le terme général de la matrice $M_B(\mathcal{R})$, alors

$$a_i^i = a_j^k = 1$$

Mais comme f est une application, pour $r \neq k$, on a en outre

$$a_i^r = a_j^r = 0$$

Il en résulte que les lignes i et j de la matrice $M_B(\mathcal{R})$ sont identiques.

En vertu de la proposition 3, corollaire 1, il vient

$$\det(M_B(\mathcal{R})) = \det(\mathcal{R}) = 0$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

2) Supposons maintenant que f est injective.

Comme E est fini, f est alors une bijection de E vers E . La proposition 9 que nous allons démontrer montre que

$$\det(f) = 1 \quad \text{ou} \quad -1$$

Proposition 9

Si f est une bijection de E vers E , alors $\det(f) = 1$ ou -1 .

Démonstration

$B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ désigne une base de E . Pour tout naturel $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe un naturel et un seul $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que

$$f(x_i) = x_k$$

Désignons par g la bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ vers $\{1, 2, \dots, n\}$ ainsi définie.

Si a_i^s désigne le terme général de la matrice $M_B(\mathcal{R})$, alors

$$\det(\mathcal{R}) = \sum_{s \in \mathcal{S}_n} \mathcal{E}(s) a_1^{s(1)} a_2^{s(2)} \dots a_n^{s(n)}$$

Pour $s \neq g$, il existe un naturel k tel que:

$$s(k) \neq g(k)$$

mais comme $f(x_k) = x_{g(k)}$, $(x_k, x_{g(k)}) \in f$. Cela signifie que

$$a_k^{s(k)} = 1$$

Comme f est une application et que $s(k) \neq g(k)$, on a donc

$$a_k^{s(k)} = 0$$

Par conséquent

$$\det(\mathcal{R}) = \mathcal{E}(g) = 1 \quad \text{ou} \quad -1$$

selon que $e(g) = 1$ ou -1 .

Théorème 2

Le déterminant d'une relation d'équivalence (distincte de la relation d'égalité) est nul.

Démonstration

$B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E et \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur E distincte de la relation d'égalité sur E .

Il existe deux naturels i et j tels que

$$i \neq j \quad \text{et} \quad (x_i, x_j) \in \mathcal{R}$$

Comme \mathcal{R} est une relation d'équivalence

$$(x_i, x_k) \in \mathcal{R} \quad \text{si et seulement si} \quad (x_j, x_k) \in \mathcal{R}$$

Les deux lignes i et j de la matrice $M_B(\mathcal{R})$ sont donc identiques.

D'après la proposition 3, corollaire 1,

$$\det(M_B(\mathcal{R})) = \det(\mathcal{R}) = 0$$

Théorème 3

Le déterminant d'une relation d'ordre est égal à 1.

Démonstration

Par récurrence sur le nombre n des éléments de E , supposons que pour tout ordre sur E , le déterminant correspondant soit 1. Il est clair que si $n = 1$, la proposition est vérifiée.

Soit alors E un ensemble à $(n + 1)$ éléments et $B = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ une base de E . Si \mathcal{O} est une relation d'ordre sur E , E admet au moins un élément maximal, x_k par exemple.

Par conséquent pour tout naturel $j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$

$$\text{si } j \neq k, \quad (x_k, x_j) \notin \mathcal{O}$$

Si a_i^j désigne le terme général de la matrice $M_B(\mathcal{O})$, on a donc

$$a_k^j = 0 \quad \text{si } k \neq j$$

et par réflexivité

$$a_k^k = 1$$

La proposition 3, corollaire 3, montre que

$$\det(\mathcal{O}) = (-1)^{k+k} \Delta_k^k$$

où Δ_k^k est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant dans $M_B(\mathcal{O})$ la ligne k et la colonne k .

Or $B' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ est une base de $E - \{x_k\}$ et en considérant l'ordre induit \mathcal{O}' par \mathcal{O} sur $E - \{x_k\}$, on a

$$\Delta_k^k = \det(M_{B'}(\mathcal{O}'))$$

L'hypothèse de récurrence montre alors que $\Delta_k^k = 1$, d'où

$$\det(\mathcal{O}) = (-1)^{k+k} 1 = 1$$

Bibliographie

- [1] GLAYMANN, M. *La source vive: but de notre pédagogie.* Premier Séminaire International GALION, (O.C.D.L.-HATIER), Paris 1970.
- [2] QUEYSANNE, M. *Algèbre et Spéciales AA'*, (A. COLIN), Paris 1964.