4

LES RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P

Matériaux pour un dictionnaire

par J.M. CHEVALLIER

Pour essayer d'en sortir.

Dans le n° 287 je suis revenu sur *angle*, que j'avais laissé dans la pénombre depuis un bon bout de temps. En matière de langage l'évolution ne peut être que lente : à vouloir brusquer les choses, on serait soi-même incapable d'éviter des redites constantes qui n'avanceraient à rien ; au contraire, le temps passant, on peut avoir ou d'autres peuvent vous inspirer une nouvelle vue des problèmes. Essayons donc à nouveau d'y voir clair.

J'ai dit la dernière fois, et je crois important d'insister là-dessus, que le seul sens vraiment général du mot "angle" — j'entends par là un sens élémentaire et intuitif en même temps que rattaché à une théorie d'ensemble — est celui-ci : classe d'équivalence, pour les isométries *positives ou non*, des paires de directions orientées dans un espace euclidien. Dire qu'un triangle isocèle a deux de ses angles égaux est clair et simple, et il n'y a aucune raison de culpabiliser les gens qui s'expriment ainsi. Au nom de quoi les culpabiliserait-on d'ailleurs ? Dans n'importe quel espace euclidien c'est le produit scalaire qui sert à définir les angles par leur cosinus, et ce produit scalaire est une forme symétrique ; vouloir distinguer par ce moyen l'angle du couple (u,v) de celui du couple (v,u) est donc illusoire. Pour définir un sinus qui diffère d'un couple à l'autre, on peut avoir recours aux formes bilinéaires *alternées* dans le plan, mais pas dans les espaces de dimension supérieure. Cela n'amoindrit pas l'importance du groupe des rotations planes, mais on l'a exagérée quand on a voulu faire d'elles le prototype des angles.

Cette situation se reflète d'ailleurs dans les notations. Ne touchons pas à la notation $\widehat{xAy}$ en géométrie très élémentaire : elle est simple et suffit aux besoins à ce niveau. Mais l'angle de deux vecteurs unitaires u et v (de deux directions orientées, demi-droites, etc.) est bel et bien une fonction d'ensemble — précisément une fonction de la paire $\{u,v\}$ sans que le couple (u,v) intervienne. Dans ces conditions, je ne vois pas ce que la notation $\{\widehat{u,v}\}$ pourrait avoir de blâmable. La seule objection pourrait être celle-ci : Que se passe-t-il si $u = v$? Justement parce que c'est une fonction d'ensemble il ne se passe rien ; de la même façon que $\sup\{a,b\}$ garde un sens lorsque $a = b$, l'écriture $\{\widehat{u,u}\}$, voire $\{\widehat{u}\}$ semble parfaitement acceptable pour désigner l'angle nul, l'équivalence par isométrie étant manifestement assurée. Bien sûr, ces angles n'ont pas une belle structure additive et toute formule de Chasles est hors de question ; il faut bien se contenter de ce qu'on a, on se consolera avec un ordre "naturel" de tout repos, qui admet un plus petit élément, $\{\widehat{u}\}$, et un plus grand élément $\{\widehat{u,-u}\}$.

L'avantage de cette notation — outre son honnêteté — c'est qu'elle laisse le champ libre, en géométrie *exclusivement plane*, à la notation $(\widehat{u,v})$ avec son sens habituel : classe d'équivalence, pour les isométries *positives*, du couple (u,v). Et l'on retrouve le groupe additif, mais en perdant l'ordre. Ce qu'on n'a toujours pas trouvé, c'est le nom. A la réflexion "angle-de-vecteurs", même avec des tirets, n'est pas fameux, car le précédent avait droit tout aussi bien à cette appellation. Si le néologisme "trope" avait eu quelques succès, je toucherais de mirifiques droits d'auteur — ce n'est pas le cas. Puisqu'on ne s'est pas mis en trope (aïe !), et puisqu'il vaut mieux éviter à tout prix les "angles orientés" (qui ne l'ont jamais été, les pauvres, malgré nos illusions passées), on peut proposer des choses comme *angle alterné* (au sens exact de "forme alternée"), *angle de couple*, *angle de rotation* (souvent *rotation* tout court) ... Il paraît probable que tout cela s'abrégera en "angle" au moins dans le langage parlé ; je n'y vois que des inconvénients mineurs dans la plupart des cas. Ce contre quoi je m'étais élevé (je continue d'ailleurs), c'était cette prétention abusive : confisquer le mot "angle" pour cet usage-ci et contraindre les honnêtes gens soit à y renoncer ailleurs, soit à l'affubler de sobriquets comme "géométrique".

Reste l'ineffable "mesure des angles". Aucun problème pour les angles $\}\widehat{u,v}\{$ qui se mesurent bien sagement de 0 à π, de 0 à 180, de 0 à 200, avec extension possible aux secteurs (de 0 à 2π, etc.). Si les gens aiment les "écarts angulaires" et les indices, ils peuvent s'en donner à coeur joie ; pour ma part $\}\widehat{u,v}\{ = 120^o = \frac{2\pi}{3}$rd ne me donne ni crampes, ni migraines. Mais $(\widehat{u,v})$ reste attaché à une classe modulo 2π de réels que les habitudes de la cinématique incitent à appeler à nouveau "angles de rotation" ; et là-dessus vient encore se greffer "l'argument" d'un complexe qui, suivant les problèmes, est un "angle de rotation" au sens du paragraphe qui précède ou au sens du présent paragraphe ! Je persiste, pour le sens actuel, à proposer *phase* (sans même escompter de droits d'auteur cette fois, car ils reviendraient aux physiciens) ; mais, s'il y a une meilleure proposition, je lui ferai toute la publicité souhaitable. En fait je crois bien que tout le monde maugrée contre ces ambiguïtés irritantes, mais qu'au fond on ne tient pas tant à changer ses petites habitudes ... Alors ne nous plaignons pas.