Un retour au concret

par P. JACQUEMIER
(Grenoble)

Soit un tableau carré, sur lequel nous distinguerons des lignes, des colonnes, et une diagonale, D. Certaines des cases de ce tableau sont noires; les autres sont blanches.

Désignons par m le nombre de cases noires situées sur D, et par n le nombre de cases noires non situées sur D, et dont la case symétrique par rapport à D est blanche.

Enfin, appelons *valence* d'une colonne le nombre de ses cases noires; envisageons les colonnes dont la valence est impaire, et désignons par p la somme de leurs valences.

Théorème: *quels que soient le nombre et la disposition des cases noires sur le tableau, la somme*

$$s = m + n + p$$

est paire.

Le lecteur a peut-être l'impression d'avoir lu quelque part ce qui précède. La chose est exacte: dans le Bulletin 274, page 235, sous la signature de notre collègue Frasnay. La rédaction était autre, tout autre même, mais ce qui précède n'est qu'un plagiat: c'est la répétition sous une autre *forme*, avec une allure plus concrète, du texte de Frasnay. Une même étude peut revêtir deux habillages fort différents.

La démonstration ci-dessous, par récurrence sur le nombre total de cases noires, est, elle aussi, différente de celle de notre collègue.

Soit un certain *état* du tableau. Que se passe-t-il quand on noircit une nouvelle case ?

Regardons d'abord le comportement de p. Une seule colonne voit sa valence se modifier: par augmentation de 1. Si cette valence était paire, elle devient impaire et le nombre impair qu'elle devient est à ajouter à p, qui change donc de parité; si cette valence était impaire, elle devient paire et le nombre impair qu'elle était est à retirer de p; là encore p change de parité. *Noircir une case quelconque change la parité de* p.

Regardons maintenant les comportements de m et de n:

1) Ou bien la case que l'on noircit est sur D; alors m augmente de 1 et n reste inchangé;
2) Ou bien elle ne l'est pas; alors m ne change pas; en outre, si la case que l'on noircit est symétrique par rapport à D d'une case noire, n diminue de 1; sinon n augmente de 1.

Récapitulons: quand on noircit une nouvelle case, p change de parité, ainsi que m ou n (*ou exclusif*). La somme $s = m + n + p$ conserve donc la même parité.

Or, quand aucune case n'est noire, $m = 0$ et $n = 0$; chaque colonne est de valence nulle et $p = 0$; donc $s = 0$, nombre pair. Quel que soit le nombre de cases noires, et où qu'elles soient placées, la somme s est donc paire.

Exemples

1) Toutes les cases sont noires. Si le nombre h des colonnes (ou des lignes) est pair, $s = h$; s'il est impair, $s = h + h^2$, nombre pair.

2) Les cases noires et blanches sont celles d'un échiquier (64 cases). Si la diagonale D est blanche, $s = 0$. Si elle est noire, $s = 8$. Sur un damier (100 cases), si D est blanche $s = 50$ (dix colonnes de valence 5), si elle est noire $s = 60$.

Sur un tableau carré colorié à la manière d'un damier, le nombre h de colonnes entraîne, selon sa position par rapport aux multiples de 4, des situations variées. On obtient pour s (ou s' ou s'', voir ci-dessous), la diagonale D étant blanche, ou noire, des suites de naturels qui tenteraient les faiseurs de tests, amateurs de suites à prolonger.

Remarques

1) Au lieu d'envisager la somme p des valences impaires, on aurait pu se borner à parler du nombre q de colonnes dont la valence est impaire; p et q sont de même parité, ce qui permet d'énoncer que la somme $s' = m + n + q$ est paire.

2) Le nombre total r de cases noires ayant, lui aussi, même parité que p, la somme $s'' = m + n + r$ est paire, proposition plus simple par laquelle aurait pu commencer cette étude.

3) Frasnay, à qui j'ai présenté ma *version* de son texte, me propose d'ajouter la généralisation suivante:

Le tableau carré, qui a été ci-dessus découpé en colonnes, peut aussi bien être découpé en morceaux quelconques (chacun comprenant un nombre entier de cases). On peut appeler *valence* d'un morceau le nombre de ses cases noires, envisager les morceaux dont la valence est impaire et désigner par P la somme de leurs valences. La démonstration ci-dessus peut être répétée: quels que soient le nombre et la disposition des cases noires, et quel que soit le découpage du tableau, la somme $S = m + n + P$ est paire, de même, plus simplement, que la somme $S' = m + n + Q$ où Q est le nombre des morceaux impairs.

Si les morceaux sont tous d'une seule case, on retrouve ici la proposition faite en 2) ci-dessus.