# A propos de la notion de probabilité conditionnelle

par L. SCHLURAFF (Varangéville)

Le calcul des probabilités est une science ancienne. C'est pourquoi, malgré une présentation moderne avec la notion de mesure sur un ensemble, on trouve encore dans la plupart des manuels scolaires un certain nombre de recettes très mal justifiées et des notions parfois confuses. La notion de probabilité conditionnelle souffre précisément de cette difficulté de "réadaptation" :

— *Sa présentation est souvent confuse :*

En effet certains auteurs en font le *troisième axiome de la théorie des probabilités.* Cet "axiome" devrait donc, dans une même formulation, d'une part définir certains termes qui le composent (— probabilité conditionnelle —), et d'autre part établir des liaisons mathématiques entre ces différents termes, cela dans un langage purement mathématique. Bien que je ne dispose que de quelques rudiments de logique mathématique, cela ne me semble pas possible ; aussi je trouve impropre leur utilisation du mot "axiome".

D'autres, cependant, sentent bien que l'expression $P(A \cap B) / P(A)$ constitue en fait une définition de la probabilité conditionnelle, mais très souvent ils oublient d'en préciser le modèle ensembliste. Mais de toute manière, pour déterminer ce rapport, il faut, soit en connaître les deux termes, soit trouver une méthode de détermination directe.

— *Elle donne lieu à l'emploi mal justifié d'une recette.*

Dans aucun manuel consulté sur cette question je n'ai trouvé une présentation rigoureuse de la méthode directe mentionnée ci-dessus, et la résolution des exercices proposés procède donc beaucoup plus de la mystification du magicien que d'une démarche mathématique.

Je voudrais dans le court exposé qui va suivre, tenter de dissiper cette confusion, et rendre valide, sous réserve de certaines hypothèses, l'emploi de la "recette des probabilités conditionnelles" !

Enfin, dans une remarque finale, je voudrais montrer que, dans la mesure où, lors d'un enseignement élémentaire, il n'est fait appel au rapport $P(A \cap B) / P(A)$ que pour la résolution de certains types d'exercices, il est absolument inutile de parler de probabilité conditionnelle, car ce rapport peut, avec les hypothèses mentionnées plus haut, être déterminé très simplement. Et dans l'enseignement secondaire il serait prudent d'éviter une notion qui n'a certainement aucun intérêt à ce niveau.

## Notion de probabilité conditionnelle

Terminologie : L'*univers U* d'une expérience est l'ensemble de toutes les *éventualités* ou *événements simples* possibles.

Un *événement A* est une réunion d'éventualités ou une partie de U.

$\mathcal{P}(U)$ est l'ensemble de tous les événements ou l'ensemble des parties de U.

Un *système complet d'événements* de U est une partition de U.

I *Théorème*

Soit un univers U muni d'une loi de probabilité p. A une partie de U de probabilité non nulle ; alors l'application f de $\mathcal{P}$ (U) dans R définie par :

$$\forall E \in \mathcal{P}(U), f(E) = P(A \cap E) / P(A)$$

est une loi de probabilité sur U.

La démonstration est très simple, et n'a aucun intérêt ici.

II *Définition*

Si E est un événement de U, A un événement de probabilité non nulle, le nombre $P(A \cap E) / P(A)$ s'appelle

*probabilité conditionnelle de E sachant A.*

On peut alors le noter $p(E/A)$ ou simplement $p_A(E)$.

On établit alors aisément les deux propriétés suivantes :

1) $p_A(A) = 1$

2) $\forall E \in \mathcal{P}(U), p_A(E) = p_A(A \cap E)$.

III *Proposition*

Si p est une loi de probabilité sur l'univers U, et si l'événement A a une probabilité non nulle, si deux événements *inclus dans A* sont équiprobables pour la loi de probabilité p, alors ils le sont aussi pour la loi de probabilité $p_A$.

La vérification est immédiate.

IV *Application au calcul des probabilités*

Avec les hypothèses de la proposition précédente on considère que :

a) A peut être exprimé par un *système complet fini* d'événements équiprobables pour la loi p. Si n est l'ordre de ce système, on a :

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{et} \quad 1 = p_A(A) = n\, p_A(E_i)\,.$$

Et par suite on a : $p_A(E_i) = 1/n$.

b) E étant un événement quelconque de U, $E \cap A$ est la réunion de m événements distincts $E_i$, on aura alors :

$$p_A(E \cap A) = m\, p_A(E_i) = m/n$$

Et donc : $p_A(E) = \dfrac{p(A \cap E)}{p(A)} = p_A(E \cap A) = m/n$ .

On utilise donc en général le ***résultat pratique suivant*** :

> Soit U un univers muni d'une loi de probabilité p, A un événement de probabilité non nulle, et E un événement quelconque de U. Si A est la réunion de n événements équiprobables, deux à deux incompatibles, et $E \cap A$ la réunion de m d'entre eux, on a : $p(A \cap E)/p(A) = m/n$ .

## V *Remarque*

On peut déterminer le rapport précédent sans utiliser la notion de probabilité conditionnelle.

En effet, en reprenant successivement les divers points du paragraphe précédent, on a :

$$\text{a)}\quad p(A) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = n\, p(E_1)$$

$$\text{et donc : } p(E_i) = p(A)/n$$

$$\text{b)}\quad p(A \cap E) = m\, p(E_1) = m\, p(A)/n$$

Et on a donc bien :

$$p(A \cap E) = \frac{m}{n} p(A)$$

## VI *Exemple commenté*

Enoncé : Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires. On dispose en plus d'une réserve de 10 boules noires. Le jeu consiste à retirer de l'urne une boule au hasard. Si la boule tirée est noire le jeu s'arrête, si la boule est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire. Et on recommence. Quelle est la probabilité pour que le jeu s'arrête au second tour ?

### Commentaire et résolution

Il est clair qu'en distinguant les 20 boules du jeu, on pourrait construire l'univers U des éventualités, mais du moment qu'on ne veut pas déterminer complètement la loi de probabilité, un tel travail fastidieux s'avère inutile. *Néanmoins* on suppose qu'il existe une loi de probabilité sur U respectant les conditions d'équiprobabilité exprimées dans l'énoncé, c'est-à-dire que l'on suppose à priori que le problème admet une solution ! (*)

— Soit A l'*événement :* la première boule tirée est blanche.
Au premier tour l'une quelconque des 10 boules a la même chance d'être tirée, donc U est la réunion disjointe de 10 événements équiprobables, et A est la réunion de 6 d'entre eux ; on a donc : $p(A) = 6/10 = 3/5$ .

— Soit B l'*événement :* la deuxième boule est noire.
On peut remarquer que l'on a : $B \subset A$.
Au deuxième tour chacune des 11 boules de l'urne a une chance égale d'être tirée, donc A est la réunion disjointe de 11 événements équiprobables et B est la réunion de 5 d'entre eux ; par suite, d'après l'étude précédente, on a : $p(A \cap B)/p(A) = 5/11$ .

— Or l'événement considéré dans l'énoncé est B (ou $A \cap B$, puisque l'on a vu que l'on a : $B \subset A$), d'où :

$$p(A \cap B) = 5/11 \times 3/5 = 3/11 \simeq 0,27 .$$

*La probabilité cherchée est donc 0,27.*

---

(*) *Note :* En toute rigueur mathématique, il faudrait s'assurer que la loi de probabilité existe, c'est-à-dire que l'énoncé a un sens. Car le seul fait de trouver une valeur hypothétique pour $p(A \cap B)$ ne permet pas de conclure. Je soumets à la sagacité d'autres collègues le problème évoqué ici.