Dénombrements et groupe symétrique

par R. DUSSAUD (U.E.R. Sciences, Chambéry)

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle permutation de E toute bijection de E sur lui-même. L'ensemble des permutations de E est un sous-groupe $\mathcal{S}_E$ pour la composition des applications et tous les groupes $\mathcal{S}_E$ sont isomorphes à $\mathcal{S}_n$ groupe des permutations des naturels de 1 à n formant l'ensemble P_n

$$\{1, 2, ..., n\}.$$

Toute permutation d'un ensemble à n éléments n'est décomposable que d'une seule manière en cycles disjoints. Cette décomposition étant supposée faite, nous négligerons les cycles à un élément puisqu'ils ne déplacent pas cet élément. Si nous considérons un sous-ensemble A_k de P_n de cardinal k nous pourrons construire exactement $(k-1)\,!$ cycles portant chacun sur tous les éléments de A_k.

Ayant rappelé ces résultats élémentaires, effectuons une partition quelconque de A_k en $B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_s}$ dont les cardinaux $k_1, k_2 \dots, k_s$ vérifient :

(1) $\qquad 2 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \dots \leqslant k_s \leqslant k$

(2) $\qquad k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$

Une telle partition étant désignée par $(k_1, k_2, \dots, k_s)$ nous dirons qu'elle précède $(k'_1, k'_2, \dots, k'_r)$ si la première des différences $k'_i - k_i$ non nulle est positive, la relation (2) impliquant que cette condition sera acquise pour un i vérifiant : $i \leqslant \inf(r, s)$. D'autre part, comptons dans (1) de gauche à droite le nombre de k_i égaux. Il y aura u_1 nombres k_i égaux à k_1, u_2 nombres égaux à k_{u_1+1} ... etc ... On a donc une suite $\{u_i\}$ ordonnée par des indices :

(3) $\qquad u_1, u_2, \dots, u_t \,;\, u_i \geqslant 1 \,;\, i \in \{1, 2, \dots, t\}$

Le cardinal de l'ensemble des partitions de A_k qui ont les mêmes caractéristiques (1), (2) et (3) est manifestement :

$$(4)\quad d_{ki} = \frac{\binom{k}{k_1}\binom{k-k_1}{k_2}\cdots\binom{k-k_1-\dots-k_{s-1}}{k_s}}{u_1\,!\;u_2\,!\;\dots\;u_t\,!}\cdot(k_1-1)\,!\;(k_2-1)\,!\;\dots\;(k_s-1)\,!$$

et le nombre D_k de partitions de A_k en sous-ensembles ayant au moins deux éléments se détermine ensuite en construisant les g suites $(k_1 \dots k_s)$ d'une manière systématique grâce à la relation d'ordre introduite ci-dessus. On a :

$$D_k = \sum_{i=1}^{i=g} d_{ki}$$

enfin le cardinal de l'ensemble des permutations de P_n dont n—k éléments (et n—k seulement) sont fixes, est :

$$D'_k = \binom{n}{k} D_k$$

Le calcul comporte une vérification intéressante car :

$$n\,! = 1 + \sum_{k=2}^{k=n} D'_k$$

On peut aussi simplifier la formule (4) en utilisant $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{(n-p)!\ p!}$

DENOMBREMENT DES PERMUTATIONS DE
S_8 A 8—k ELEMENTS INVARIANTS

ORDRE 1	ORDRE 2	NOMBRES D'_k	ORDRE 1	ORDRE 2	NOMBRES D'_k
k = 2	2	28	7	2, 2, 3	1 680
3	3	112		2, 5	4 032
4	2, 2	210		3, 4	3 360
	4	420		7	5 760
5	2, 3	1 120	8	2, 2, 2, 2	105
	5	1 344		2, 2, 4	1 260
6	2, 2, 2	420		2, 3, 3	1 120
	2, 4	2 520		2, 6	3 360
	3, 3	1 120		3, 5	2 688
	6	3 360		4, 4	1 260
				8	5 040
		10 654			29 665

S_8 : 10 654 + 29 665 + 1 = 40 320 = 8 !

Groupe alterné A_8 : 112 + 210 + 1 344 + 2 520 + 1 120 + 1 680 + 5 760 + 105 + 3 360 + 2 688 + 1 260 + 1 = 20 160

Je signale ce procédé car il permet de renouveler quelque peu les exemples qui sont à notre disposition. Cette méthode de comptage appliquée au groupe S_8 et résumée dans le tableau ci-dessus m'a demandé une heure de calcul environ avec comme seul instrument un Triangle de Pascal construit jusqu'à 8. Nos élèves y trouveront matière à réflexion sur le préordre et l'ordre, les sous-groupes de S_n, l'équation des classes... etc ... Le sujet est riche et il est utile d'avoir des exemples concrets pour une étude assez aride à ce niveau. On sort très vite de S_3 et de S_4 qui traînent partout et où tout se passe vraiment trop bien !