Les Olympiades

Cetinju (Yougoslavie) 5 et 6 Juillet 1967

CETINJU (Yougoslavie) 5 et 6 juillet 1967

1 Dans le parallélogramme ABCD on donne :

$$AB = a \quad AD = 1 \quad \widehat{DAB} = \alpha$$

On sait d'autre part que le triangle ABD est acutangle.

De chaque sommet du parallélogramme comme centre, on décrit un cercle de rayon 1.

Démontrer que les quatre cercles recouvrent complètement le parallélogramme si et seulement si

$$a < \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$$

2 On considère un tétraèdre dont une et une seule arête a une longueur plus grande que 1.

Démontrer que le maximum du volume du tétraèdre est égal à $\frac{1}{8}$.

3 Soit k, m, n des naturels tels que $m + k + 1$ = nombre premier $> n + 1$. On note C_s le naturel $s(s + 1)$.

Démontrer que le produit

$$(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k) \dots (C_{m+n} - C_k)$$

est divisible par le produit $C_1 C_2 \dots C_n$.

4 On donne deux triangles acutangles

$$A_o B_o C_o \quad \text{et} \quad A' B' C'.$$

Il existe une infinité de triangles ABC semblables à A'B'C' et circonscrits à $A_o B_o C_o$ de telle manière que

$$A_o \in [BC], \quad B_o \in [AC], \quad C_o \in [AB]$$

Construire l'un de ces triangles.

Déterminer ensuite celui de ces triangles qui a la plus grande aire.

5 On considère la suite

$$t_n = a_1^n + a_2^n + a_3^n + a_4^n + a_5^n + a_6^n + a_7^n + a_8^n$$

où les a_i représentent des réels, non tous nuls.

Sachant que parmi les termes de cette suite il y en a une infinité qui sont nuls, déterminer l'indice n de ces termes.

6 Dans une compétition sportive qui a duré n jours $(n > 1)$, m médailles ont été distribuées.

Le premier jour on a distribué une médaille plus $\frac{1}{7}$ des $(m - 1)$ médailles restantes.

Le deuxième jour, on a distribué 2 médailles plus $\frac{1}{7}$ du nouveau reste, et ainsi de suite de telle manière que le $n^{\text{ième}}$ jour on a distribué exactement les n médailles qui restaient.

Déterminer les nombres m et n .

MOSCOU (U.R.S.S.) 1968

1 Il existe un seul triangle dont les côtés sont des naturels consécutifs tels qu'il existe un angle du triangle double d'un autre.

2 Trouver tous les entiers x dont le produit des chiffres de l'écriture décimale de x égale $x^2 - 10x - 22$.

3 a, b et c étant des réels, a étant non nul, on considère le système réel :

$$\begin{cases} a x_i^2 + b x_i + c = x_{i+1} & (1 \leqslant i < n) \\ a x_n^2 + b x_n + c = x_1 \end{cases}$$

On pose $\Delta = (b - 1)^2 - 4\,ac$. Démontrer que

— si $\Delta < 0$, il n'existe pas de solution ;

— si $\Delta = 0$, il existe une solution unique ;

— si $\Delta > 0$, il existe au moins deux solutions.

4 Dans un tétraèdre, on peut choisir un sommet tel que l'on puisse construire un triangle avec les arêtes issues de ce sommet.

5 f étant une fonction numérique telle qu'il existe un réel a tel que :

$$f(x + a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$$

démontrer que f est périodique. Donner un exemple d'une telle fonction avec a = 1 .

6 [x] étant la partie entière de x, calculer la somme :

$$\left[\frac{n + 1}{2}\right] + \left[\frac{n + 2}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n + 2^k}{2^{k + 1}}\right] + \dots$$

BUCAREST (Roumanie) 1969

1 Démontrer qu'il existe une infinité de naturels a tels que $(n^4 + a)$ ne soit premier pour aucune valeur de n . $a = 2^{[illegible]} b^{4m}$

2 $a_1, a_2, \dots, a_n$ étant des réels, on considère la fonction f définie

par :

$$f(x) = \frac{\cos(a_1 + x)}{1} + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \dots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n - 1}}$$

Montrer que $f(x_1) = f(x_2) = 0$ implique que x_1 est congru à x_2 modulo π .

3 a étant un nombre donné, discuter pour chaque valeur de k comprise entre 1 et 5 l'existence d'un tétraèdre ayant k côtés de longueur a et $(6 - k)$ côtés de longueur 1.

4 Soit CD une demi-corde perpendiculaire en D à un diamètre AB d'un cercle.
Démontrer que le centre du cercle inscrit au triangle ABC est aligné avec les centres des deux cercles tangents à CD et au demi-cercle ABC.

5 On se donne n points dans un plan.
Montrer qu'il existe au moins $\binom{n - 3}{2}$ quadrilatères convexes ayant leurs sommets parmi ces points.

6 Démontrer l'inégalité :

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}$$

sous les conditions $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 y_1 > z_1^2$ et $x_2 y_2 > z_2^2$.

Dans quelles conditions a-t-on égalité ?

KESTEHY (Hongrie) 1970

1 M étant un point intérieur au côté AB d'un triangle ABC, on appelle r, r_1, r_2 les rayons des cercles inscrits des triangles ABC, ACM, BCM, ρ, ρ_1, ρ_2 les rayons des cercles ex-inscrits dans l'angle C des mêmes triangles.

Démontrer la relation :

$$\frac{r_1}{\rho_1} \times \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}$$

2 On considère la représentation chiffrée :

$$\overline{x_n\, x_{n-1} \dots x_2\, x_1\, x_o} \quad (x_n \neq 0)$$

d'un naturel A_n dans le système de base a. On suppose $x_{n-1} \neq 0$ et on appelle A_{n-1} le naturel $\overline{x_{n-1} \dots x_1\, x_o}$. Les mêmes symboles représentant, dans le système de base b, deux autres naturels B_n et B_{n-1}, établit l'équivalence :

$$a > b \iff \frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}$$

3 On considère les suites réelles croissantes (a_n) telles que $a_o = 1$, et l'on pose :

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}$$

Démontrer la double inégalité :

$$0 \leqslant b_n < 2 .$$

c étant un réel fixé tel que $0 \leqslant c < 2$, démontrer qu'il existe une suite (a_n) pour laquelle $b_n > c$ pour une infinité d'indices n.

4 Déterminer l'ensemble des naturels n tels que l'on puisse décomposer l'ensemble $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ en deux parties disjointes non vides dont les produits des éléments qui les composent soient égaux.

5 On considère un tétraèdre ABCD tel que DB soit orthogonal à DC, le pied de la perpendiculaire abaissée de D sur la face ABC coïncidant avec l'orthocentre de ABC. Démontrer l'inégalité :

$$(AB + BC + CA)^2 \leqslant 6\,(DA^2 + DB^2 + DC^2)$$

Quand y-a-il égalité ?

6 100 points d'un plan étant tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés, établir qu'il y a au plus 70 % de triangles dont tous les angles soient aigus parmi les triangles que l'on peut former avec ces points comme sommets.

ZILINA (Slovaquie) 1971

1 Soit $a_i \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $n > 2$. Démontrer que l'inégalité

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)...(a_1 - a_n) + ... + (a_n - a_1)...(a_n - a_{n-1}) \geqslant 0$$

est toujours vraie pour $n = 3$ et $n = 5$, mais peut être fausse pour les autres valeurs de n .

2 Soit un polyèdre convexe $A_1 A_2 ... A_9$, et les neuf polyèdres P_i que l'on en déduit par les translations de vecteurs $\overrightarrow{A_1A_i}$. Démontrer qu'il existe deux P_i ayant des points intérieurs communs.

3 Montrer qu'il existe un ensemble infini de naturels, deux à deux premiers entre eux, de la forme $(2^n - 3)$ où $n \geqslant 2$.

4 ABCD étant un tétraèdre dont toutes les faces ont des angles strictement aigus, on considère les lignes brisées XYZTX, où X appartient à l'ouvert AB, Y à BC, Z à CD et T à DA. Montrer qu'il existe une ligne de longueur minimum si, et seulement si :

$$\widehat{CAD} + \widehat{ADB} = \widehat{ACB} + \widehat{CBD} \ .$$

Il en existe alors une infinité, de longueur :

$$2 \sin \frac{1}{2} [\widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAB}] \ .$$

5 Pour tout naturel n, il existe un ensemble fini E de points du plan réel tel que tout élément de E soit situé à une distance égale à 1 de n autres points de E, et à une distance différente de tous les autres.

6 Une matrice carrée d'ordre n est constituée de naturels a_{ij} tels que

$$(a_{ij} = 0) \Rightarrow (a_{i1} + ... + a_{in} + a_{1j} + ... + a_{nj} > n)$$

Démontrer que la somme des éléments de la matrice est au moins égale à $\frac{1}{2} n^2$.

CRACOVIE (1972)

1 Pour tout ensemble de dix naturels écrits à l'aide de deux chiffres (en système décimal), il existe une partition en deux sous-ensembles dont les sommes des éléments soient égales.

2 Pour tout naturel $n \geqslant 4$, tout quadrilatère inscriptible peut être décomposé en n quadrilatères inscriptibles.

3 $\forall \ (m,n) \in \mathbf{N}^2$, $\dfrac{(2m)! \quad (2n)!}{m! \ n! \ (m+n)!} \in \mathbf{N}$.

4 Résoudre dans $\mathbf{R}_+^*$ le système formé de l'inéquation

$$({x_1}^2 - x_3 x_5)({x_2}^2 - x_3 x_5) \leqslant 0$$

et des quatre inéquations déduites par substitution circulaire sur les indices $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5 f et g étant deux fonctions réelles telles que $f \neq 0$ et que

$\forall \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x)| \leqslant 1$ et $f(x+y) + f(x-y) = 2\,f(x)\,g(y)$

montrer que $\forall \; y \in \mathbb{R}$, $|g(y)| \leqslant 1$

6 Etant donné quatre plans parallèles deux à deux distincts, il existe un tétraèdre régulier dont les sommets appartiennent à chacun des quatre plans.