Géométrie

par VOGT, Dijon

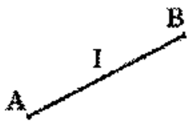
Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif de caractéristique différente de 2*. Les figures illustreront le cas où E est un espace vectoriel réel de dimension 2.

I) *Milieu*

Définition : A et B étant deux éléments quelconques de E, on appelle **milieu de (A,B)** l'élément I de E :

$\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$, encore noté $\frac{A + B}{2}$

Illustration



$$\boxed{I = \frac{A + B}{2}}$$

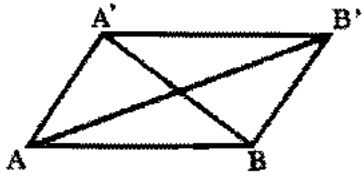
Propriété : Quels que soient les éléments A et B de E, le milieu de (A,B) est le milieu de (B,A)

$$\frac{A + B}{2} = \frac{B + A}{2}$$

* *Rappel :* (K, +, x) désignant le corps, e ou 0 le neutre de la première loi, ϵ ou 1 le neutre de la deuxième loi, dire que la caractéristique est différente de 2, c'est dire que $\epsilon + \epsilon$ (alias $1 + 1$) est différent de e (alias 0). Donc, lorsque la caractéristique est différente de 2, $\epsilon + \epsilon$ a un inverse pour la deuxième loi ; dans ce cas on adopte souvent la notation 2 pour $\epsilon + \epsilon$ et $\frac{1}{2}$ pour son inverse, même s'il ne s'agit pas du corps (R, +, x).

II) *Parallélogramme*

Définition : A, B, A', B' étant quatre éléments quelconques de E, on dit que le quadruplet (A,B,A',B') est un parallélogramme si et seulement si le milieu de (A,B') est égal au milieu de (B,A').

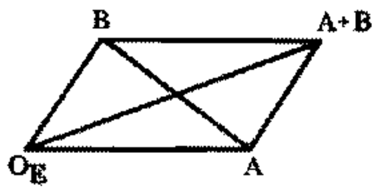


Traduction de la définition :

(A,B,A',B') est un parallélogramme si et seulement si $A + B' = A' + B$.

Exemple : Soit O_E le neutre de E pour la loi de groupe (le vecteur nul) ; le quadruplet (O,A,B,A + B) est un parallélogramme.

En effet : $O_E + (A + B) = A + B$.

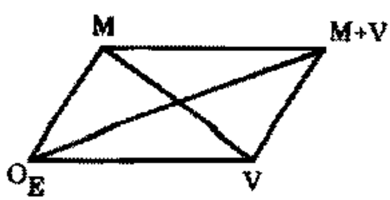


III) *Translation*

Définition : Soit V un élément de E ; on appelle *translation de vecteur V* l'application de E vers E, notée T_V, telle que

$$\boxed{T_V(M) = M + V}$$

quel que soit M de E.

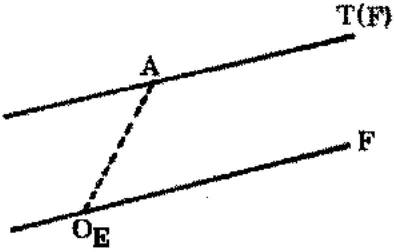


IV) *Variété affine*

Définition : On dit qu'une partie de E est une *variété affine* si et seulement si elle est l'image par translation d'un sous-espace de E.

Ainsi, si F est un sous-espace de E, et si T_A est une translation (de vecteur A), l'ensemble $T_A(F)$ est une variété affine.

En particulier, si F est de dimension 1, la variété affine est appelée *droite*.



Remarque : M, élément de E, appartient à $T_A(F)$ si et seulement si M — A appartient à F. Donc la variété affine $T_A(F)$ peut être définie comme la classe d'équivalence de A modulo le sous-espace F.

$$\boxed{T_A(F) = \mathrm{cl}_F(A)}$$

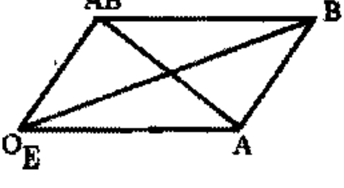
V) *Notation et relation de Chasles*

1) *Notation :* Quels que soient les éléments A et B de E, on note $\overrightarrow{AB}$ l'élément de E : B + sym(A)

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

Conséquences

. Le quadruplet $(O_E, A, \overrightarrow{AB}, B)$ est un parallélogramme.



En effet : $A + \overrightarrow{AB} = A + (B - A) = B = O_E + B$

. On a l'équivalence :

(A,B,A',B') est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

En effet $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ revient à $B - A = B' - A'$

ou encore $A + B' = B + A'$.

2) *Relation :* Quels que soient les éléments A, B, C de E,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$$

ainsi : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

VI) *Repère :* On suppose que E est de dimension finie.

1) *Définition :* On appelle repère de E, tout couple (ω,e) formé d'un élément ω de E et d'une base e de E.

2) *Coordonnées*

Soit (ω,e) un repère, $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$

Soit M un élément quelconque de E.

On sait qu'il existe un n-uplet unique $(x_1, \dots x_n)$ de scalaires tels que

$$\overrightarrow{\omega M} = x_1e_1 + \dots + x_ne_n.$$

Ce n-uplet est appelé *n-uplet de coordonnées* de M par rapport au repère (ω,e).

3) *Changement de repère*

Pour simplifier la présentation, plaçons-nous dans le cas où E est de dimension 2.

Soit deux repères de E : $\big(\omega,(i,j)\big)$ et $\big(\Omega,(I,J)\big)$.

On désigne par :

(x,y) le couple de coordonnées de M par rapport à $\big(\omega,(i,j)\big)$

(x_0,y_0) le couple de coordonnées de Ω par rapport à $\big(\omega,(i,j)\big)$

(X,Y) le couple de coordonnées de M par rapport à $\big(\Omega,(I,J)\big)$

Les relations

$I = a\,i + b\,j$ définissent la base (I,J) par rapport

$J = c\,i + d\,j$ à la base (i,j).

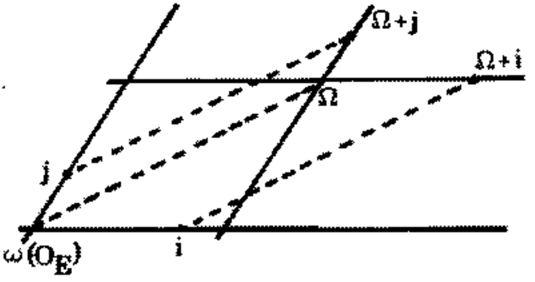
De l'égalité $\overrightarrow{\omega M} = \overrightarrow{\omega \Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, on déduit les formules connues :

$$\left| \begin{array}{l} x = x_o + a\,X + c\,Y \\ y = y_o + b\,X + d\,Y \end{array} \right. \qquad (1)$$

Cas particulier $\quad I = i\ ,\ J = j$

(1) s'écrit $\left| \begin{array}{l} x = x_o + X \\ y = y_o + Y \end{array} \right.$

Illustration dans le cas $\omega = O_E$



Remarque 1 :

Les notions de barycentre (dont le milieu est un cas particulier), de parallélisme de variétés affines, de norme euclidienne, etc... s'introduisent facilement.

Remarque 2 :

Une présentation analogue peut être faite en supposant que **E** soit un module.

Il semble intéressant d'étudier en classe de quatrième le module $\mathbf{Z}^2$ sur $\mathbf{Z}$, d'illustrer sur des quadrillages et de montrer l'insuffisance à décrire toutes les figures simples qu'on peut tracer sur une feuille (ou au tableau).