Présentation Algorithmique des notions ensemblistes et logiques

par J. KUNTZMANN (Université de Grenoble)

La présente étude est partie de deux constatations convergentes :

— le jeu (qui est une forme d'action) tient une place importante dans la vie du jeune enfant,

— les algorithmes, c'est-à-dire les procédés permettant de passer réellement de données à un résultat, jouent un rôle essentiel dans toutes les applications des mathématiques et leur importance à l'intérieur des mathématiques elles-mêmes va en croissant.

On trouve d'ailleurs une indication sur ce thème dans Wheeler (1).

La présentation ci-dessous n'est bien entendu qu'un canevas. Des morceaux classiques viennent s'y insérer. Ils n'ont pas été développés en détail.

L'auteur n'a pas l'occasion d'enseigner à de jeunes enfants. Il n'a pas compétence pour dire comment le sujet pourrait être découpé suivant les tranches d'âge. Il se contente de livrer ses réflexions à ses collègues instituteurs ou professeurs de sixième — cinquième.

---

(1) Wheeler, *Mathématique dans l'enseignement élémentaire* OCDL 1970.

DES ELEMENTS A L'ENSEMBLE

Nous partons d'objets préexistants et connus. Ces objets possèdent des désignations ne prêtant pas à quiproquo.

FORMER UN ENSEMBLE avec certains de ces objets c'est *décider* qu'il est utile de les considérer collectivement et de *créer* à partir d'eux un nouvel être : *l'ensemble* dont ils sont les *éléments*. On matérialise cette création en fixant des dénominations pour cet ensemble.

Libre au mathématicien de donner ensuite à l'ensemble une existence autonome par des axiomes ; il me semble essentiel, avec de jeunes enfants, d'insister sur l'aspect volontaire de cette création. Nous ne vivons pas dans un océan d'ensembles farfelus préexistants. Nous créons les ensembles (éventuellement farfelus) qu'il nous plaît de créer.

Déjà à ce niveau, pourtant très élémentaire, on rencontre un des procédés essentiels de la pensée mathématique : création d'objets nouveaux à partir d'objets déjà créés et étude de ces nouveaux objets.

ACTIVITES ELEMENTAIRES LIEES AUX ENSEMBLES (SUPPOSES FINIS)

a) Désigner *un* élément de l'ensemble supposé non vide. Ceci n'est pas autre chose qu'une procédure de choix. Au point de vue algorithmique, c'est également l'opération élémentaire.

b) Un élément a de l'ensemble E étant désigné, former un ensemble avec tous les éléments de l'ensemble E sauf a.

Cette opération joue un rôle essentiel dans les manipulations algorithmiques.

c) Rassembler les éléments de l'ensemble (ou des désignations de ces éléments) en un lieu déterminé.

On utilise alternativement a) puis b) jusqu'à épuisement de l'ensemble.

Ceci comprend le diagramme de Venn.

Une élucidation correcte de cette question devrait éliminer définitivement toutes les confusions entre l'ensemble et un sac ou une boîte où seraient enfermés les éléments.

d) Faire une liste des éléments de l'ensemble x.

Ceci se rattache à la définition en extension.

Il serait également très important de tirer au clair cette notion de *liste* (2) (qui ne se confond pas avec celle d'ordre total, car on suppose que les éléments sont effectivement *rangés*. Pour faire une liste on utilise alternativement a) et b)).

e) Reconnaître si un objet est élément d'un ensemble.

Un procédé régulier pour décider s'il en est bien ainsi consiste à comparer l'objet donné aux divers éléments classés en liste. Cette opération n'est donc pas algorithmiquement aussi élémentaire qu'elle le paraît.

f) Reconnaître si deux ensembles sont égaux.

On prend un élément du premier ensemble, on regarde s'il est élément du second. En cas de succès on applique b) aux deux ensembles.

UNIVERS

Pour continuer la théorie il est recommandé de se placer dans un ensemble bien déterminé non vide que l'on nomme *univers*.

Sur l'univers on définira des *moules*, c'est-à-dire des phrases telles que

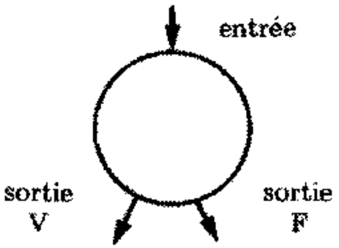
Univers : ensemble des élèves de la classe

$\square$ est un garçon

En mettant dans la case vide le nom d'un élève de la classe, on obtient une phrase qui a

— un sens
— une valeur : "vrai" ou "faux"

MACHINE A DISTINGUER



Une machine à distinguer attachée à un moule est une machine (fictive) qui reçoit sur son entrée unique la désignation d'un élément de l'univers, elle possède deux sorties : V (vrai) et F (faux).

(2) *Note de Walusinski* : Mac Lane utilise liste de n termes là où d'autres créent le mot *n-uplet*. Il s'ensuit que pour Mac Lane *liste*, comme *suite*, suppose un rangement selon l'ordre naturel.

L'entrée d'un élément active la sortie correspondante. Ceci veut dire soit que cette sortie produit un signal, soit que l'élément entré se présente à cette sortie et non à l'autre.

UTILISATIONS ELEMENTAIRES D'UNE MACHINE A DISTINGUER

a) Reconnaître si la valeur attachée à un élément de l'univers est V ou F.

b) Etiqueter V ou F les éléments de l'univers.

c) Former un ensemble avec les éléments pour lesquels la valeur est V. Un tel ensemble sera dit *partie* de l'univers.

c') Former deux ensembles, l'un avec les éléments pour lesquels la valeur est V, l'autre avec ceux pour lesquels la valeur est F.

d) Rassembler les éléments (leurs désignations) pour lesquels la valeur est V en un lieu déterminé.

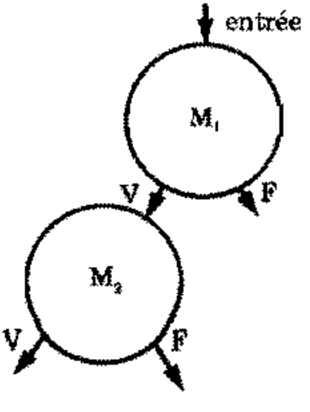
d') Idem pour deux ensembles.

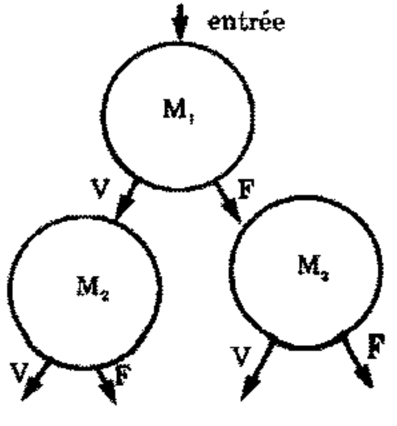
e) Former une liste pour l'ensemble des éléments dont la valeur est V à partir d'une liste de l'univers.

Nous laisserons au lecteur le soin de voir comment opérer dans chaque cas. On remarquera seulement au passage la notion importante de sous-liste extraite d'une liste.

Cette présentation redonne un contenu à la "théorie des ensembles" dont on a pu dire qu'elle se réduisait à un vocabulaire.

COMBINAISON DE MACHINES, DE MOULES, DE PARTIES





Ci-dessus quelques montages possibles relatifs à deux machines M_1 et M_2.

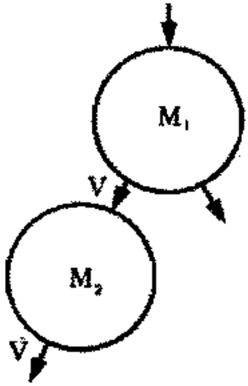
On pourra à partir de tels montages résoudre des problèmes tels que :

a) double étiquetage
b) construction de parties diverses (union, intersection, différence, etc ...)
c) rassemblement des éléments d'une partie dans un lieu déterminé
d) liste des éléments d'une partie à partir d'une liste de l'univers
e) diagramme de Carroll.

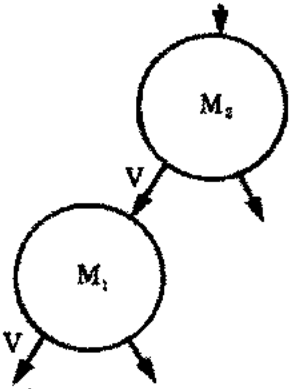
A partir de là, on peut présenter un contenu conceptuel important

— théorie des opérations sur les parties
— connecteurs logiques
— algèbre de Boole.

L'inconvénient des présentations habituelles de ces questions est qu'elles font fortement appel au langage (connecteurs *et*, *ou*) alors que l'affermissement de ce langage est justement un des buts recherchés. La présentation à partir de machines visualise beaucoup mieux et permet donc de moins s'appuyer sur le langage. Au point de vue algorithmique, on remarquera que



et



donnent le même résultat sur la sortie vrai, mais que le nombre de fonctionnements de la machine n'est pas le même dans les deux montages.