A propos de l'antisymétrie

par Mme PETIT, de Béziers

Suite à la note de notre collègue Le Dily "A propos de l'antisymétrie" *dans la rubrique "Echanges"* du Bulletin N° 267, ses remarques sur l'antisymétrie m'ont suggéré quelques réflexions :

A 1° Il est en effet assez courant de rencontrer chez les élèves (et même dans certains manuels, à en juger par la remarque de notre collègue) l'erreur consistant à penser que l'antisymétrie $[\forall_{E^2}(x,y),\ x\,\mathfrak{R}\,y \text{ et } y\,\mathfrak{R}\,x \Rightarrow x = y]$ n'est réalisée que s'il existe effectivement dans E^2 des couples (x,y) vérifiant simultanément $x\,\mathfrak{R}\,y$ et $y\,\mathfrak{R}\,x$.

2° A cause de cette erreur, et même sans cela, on peut être enclin à penser qu'il existe une certaine corrélation entre antisymétrie et réflexivité, car le fait de remplacer dans certaines relations $<$ par $\leqslant$ peut agir simultanément sur les deux propriétés.

B 1° Il me semble que l'erreur signalée au A 1° pourrait être évitée en utilisant les définitions suivantes, qui évitent le recours au connecteur $\Rightarrow$:

Soit E un ensemble, $\mathfrak{D}$ la *diagonale* du produit cartésien E^2 (c'est-à-dire l'ensemble des couples à termes égaux), $\mathfrak{R}$ une relation dans E, $\mathcal{G}$ le graphe de $\mathfrak{R}$, $\mathcal{G}'$ le graphe de la relation $\mathfrak{R}'$ réciproque de $\mathfrak{R}$.

" $\mathfrak{R}$ est *réflexive*" signifie " $\mathfrak{D} \subset \mathcal{G}$ "

" $\mathfrak{R}$ est *symétrique*" signifie " $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$ " (ou, si on préfère, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, puisque $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ ont déjà même source et même but).

"$\mathfrak{R}$ est *antisymétrique*" signifie " $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathfrak{D}$"

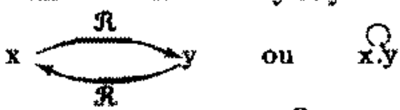
En effet, $\mathcal{G}$ est l'ensemble des couples (x,y) de E^2 tels que $(x\ \mathcal{R}\ y)$.

$\mathcal{G}'$ est l'ensemble des couples (x,y) de E^2 tels que $(x\ \mathcal{R}'\ y)$.

$\mathcal{R}'$ étant la relation réciproque de $\mathcal{R}$: $x\ \mathcal{R}'\ y \Leftrightarrow y\ \mathcal{R}\ x$

$\mathcal{G}'$ est donc l'ensemble des couples (x,y) de E^2 tels que $y\ \mathcal{R}\ x$.

$\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ n'est donc autre que l'ensemble des couples (x,y) de E^2 tels qu'on ait simultanément $x\ \mathcal{R}\ y$ et $y\ \mathcal{R}\ x$.



$\mathcal{D}$ est l'ensemble des couples (x,y) de E^2 tels que $x = y$.

$\forall_{E^2}(x,y)\ x\ \mathcal{R}\ y$ et $y\ \mathcal{R}\ x \Rightarrow x = y$

signifie donc que tout couple (x,y) de $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ doit nécessairement appartenir à $\mathcal{D}$, soit $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}$.

Sous cette forme, il est clair que, dans le cas où $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ est l'ensemble vide, il est inclus dans $\mathcal{D}$, donc que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

(*Remarque.*

Plus généralement, A et B étant des sous-ensembles de E, le fait que $A \subset B$ soit satisfaite dans le cas où $A = \phi$ fait bien comprendre que

$$\forall_E z \quad z \in A \Rightarrow z \in B$$

doit être considérée comme vraie dans le cas où l'on ne peut trouver aucun élément z de E tel que $z \in A$; et par suite que

$$\forall_E z,\ z \text{ vérifie } \alpha \Rightarrow z \text{ vérifie } \beta$$

doit être considérée comme vraie dans le cas où il n'existe dans E aucun élément vérifiant α).

$\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \phi$ est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que $\mathcal{R}$ soit antisymétrique.

2° *Interprétations à l'aide du schéma sagittal*

Réflexivité : tous les éléments de E sont bouclés.

Symétrie : il n'y a pas de flèche, d'un élément à un autre, sans "flèche-retour".

Antisymétrie : il n'y a pas, entre deux éléments *distincts*, de "flèches aller-retour".

3° *Interprétations à l'aide du schéma cartésien*

Soit P l'ensemble des points (ou des cases) figurant les éléments de E^2 ;

G l'ensemble des points (ou des cases) figurant les éléments de $\mathcal{G}$;

D l'ensemble des points (ou des cases) figurant les éléments de $\mathfrak{D}$.

D est une diagonale (au sens géométrique) de P.

Soit enfin S l'ensemble des points (ou des cases) figurant les éléments de $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$.

S est le plus grand (au sens de l'inclusion) sous-ensemble de G admettant D comme axe de symétrie (au sens géométrique). Il peut éventuellement être vide. Il peut éventuellement être inclus dans D.

Réflexivité : $D \subset G$.

Symétrie : $G = S$.

Antisymétrie : $S \subset D$.

4° *Réflexivité et antisymétrie*

Pour éviter de laisser supposer une certaine corrélation entre réflexivité et antisymétrie, il suffit de montrer, à l'aide d'un éventail suffisamment large d'exemples, qu'une relation peut être :

a) *à la fois réflexive et antisymétrique.* (tous les exemples classiques des manuels : $x \leqslant y$ dans $\mathbb{R}$, x divise y dans $\mathbb{N}$, etc...)

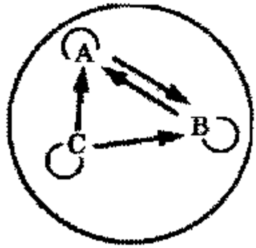
mais aussi :

b) *réflexive sans être antisymétrique*

— dans un ensemble d'enfants dont deux au moins ont la même taille, la relation : taille de x $\leqslant$ celle de y.

Prenons par exemple $\{A, B, C\}$, A et B ayant la même taille et C étant plus petit que A et B :

$\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \{(A,A), (B,B), (C,C), (A,B), (B,A)\}$



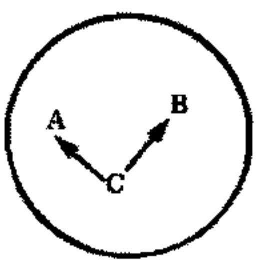
$\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ n'est pas inclus dans $\mathcal{D}$, donc la relation n'est pas antisymétrique.

— résultats analogues pour la relation : abscisse de M $\leqslant$ celle de M' dans un ensemble de points dont deux au moins ont même abscisse ; distance OM $\leqslant$ OM' dans un ensemble de points dont deux au moins sont équidistants de O ; rayon de C $\leqslant$ celui de C' dans un ensemble de cercles dont deux au moins ont des centres distincts ; etc ...

c) *antisymétrique sans être réflexive*

Dans les exemples précédents du b) le fait de remplacer $\leqslant$ par $<$ supprime la réflexivité mais fait apparaître l'antisymétrie, car alors $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \phi$

Exemple :

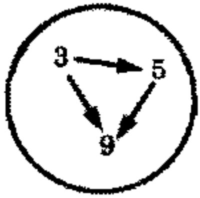


ce qui pourrait laisser supposer une corrélation entre réflexivité et antisymétrie ; on s'aperçoit vite qu'il n'en est rien en examinant d'autres exemples tels que : $x < y$ dans $\mathbb{R}$, abscisse de D $<$ celle de D' dans un ensemble de droites parallèles à l'axe des ordonnées, le rayon de (C) $<$ celui de C' dans un ensemble de cercles concentriques ; où le fait de remplacer $<$ par $\leqslant$ agit sur la réflexivité mais pas sur l'antisymétrie, celle-ci étant vérifiée dans les deux cas.

Exemples

Dans l'ensemble $\{3 ; 5 ; 9\}$:

Relation $<$



Relation $\leqslant$

Elles sont toutes les deux antisymétriques, l'une est réflexive, l'autre ne l'est pas.

On peut proposer d'autres exemples n'utilisant pas le signe $<$:

$x = y + 1$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{N}$). Ici encore $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}$ car $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \phi$.

Mais $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \phi$ n'est pas une condition nécessaire pour l'antisymétrie ;

exemple : $x = y^2$ dans $\mathbb{N}$.

Ici, $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \{(0,0), (1,1)\}$, donc $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}$:

la relation est antisymétrique, sans que $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}'$ soit vide.

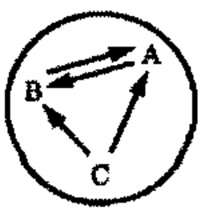
d) *enfin, ni réflexive, ni antisymétrique*

C'est le cas de la plupart des relations symétriques non réflexives telles que : $D \perp D'$ dans un ensemble de droites, distance $MM' = 1$ dans un ensemble de points, (C) et (C') sont sécants dans un ensemble de cercles, etc ...

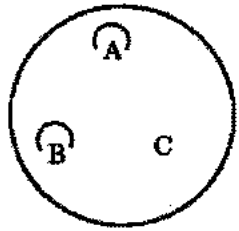
Mais la symétrie n'est pas nécessaire :

Voici un exemple de relation qui n'est ni réflexive, ni symétrique, ni antisymétrique :

une famille comporte trois enfants : deux filles A et B et un garçon C. La relation dans $\{A, B, C\}$: " ... *a pour soeur* ... " répond à la question :



C ***La symétrie n'exclut pas l'antisymétrie***



a) Exemple : la relation dans $\{A, B, C\}$ ci-contre est à la fois symétrique et antisymétrique.

b) Quelle est la condition pour qu'une relation soit à la fois symétrique et antisymétrique ?

Si elle est symétrique, $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$, donc $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

Si elle est antisymétrique, $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}$.

Donc, si elle est les deux à la fois : $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$.

Réciproquement, si $\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$, alors $\mathcal{G} = \mathcal{G}'$ et $\mathcal{G} \cap \mathcal{G}' \subset \mathcal{D}$.

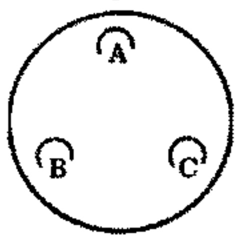
La condition cherchée est :

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{D}$$

Interprétation à l'aide du schéma sagittal : les seules flèches sont des boucles.

Autre exemple : la relation dans $\mathbf{N}$: $\sqrt{3-x} = \sqrt{3-y}$ dont le graphe est $\{(0\,;0), (1\,;1), (2\,;2), (3\,;3)\}$.

c) Si de plus $\mathcal{G} = \mathcal{D}$, la relation est à la fois symétrique, antisymétrique, réflexive et transitive, donc à la fois relation d'équivalence et relation d'ordre. C'est la relation "... *est égal à* ..." dans l'ensemble considéré.



D Si des collègues remarquent des erreurs dans ce qui précède, je leur serais reconnaissante de bien vouloir me les signaler. Merci.