

Etym.: Ce mot est un exemple d'une longue évolution sémantique. L'adj. lat. *linea* signifie littéralement "faite de lin"; substantivé, il a désigné le cordeau, la ligne (à pêcher) et par extension la ligne géométrique, particulièrement la ligne droite. On retrouve ce sens dans des expressions telles que "écriture linéaire" (écriture où les symboles se suivent sur une ligne) ou, en mécanique, "densité linéaire" d'un fil. Cependant le lien, en géométrie analytique, entre la ligne droite et l'équation du premier degré à deux variables a entraîné une nouvelle extension du sens, devenue prépondérante: le mot a longtemps servi d'abréviation un peu vague pour "qui est du premier degré"; malgré les traces laissées par cet emploi dans le vocabulaire actuel, il a aujourd'hui un sens plus strict qu'illustre l'expression "application linéaire" analysée ci-dessous.

1. Espace linéaire.

Cette expression est synonyme d' *espace vectoriel* [VECTORIEL] et pourrait lui être préférée comme faisant mieux ressortir les propriétés fondamentales de cette structure; en tout cas l'expression *linear space* est courante chez les Anglo-Saxons.

2. Application linéaire.

2.1. Définition. Etant donné deux espaces vectoriels (ou linéaires) sur le même corps K , une application f de E dans F est dite *linéaire* (ou, s'il est nécessaire de préciser, *K-linéaire*) si et seulement si à la somme de deux éléments de E elle fait correspondre la somme dans F de leurs images, et au produit d'un élément de E par un scalaire le produit de son image par le

même scalaire. En d'autres termes f est linéaire si et seulement si:

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \forall y \in E, & \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \in E, \forall \lambda \in K, & \quad f(\lambda x) = \lambda f(x), \end{aligned}$$

ce qui équivaut à:

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \forall \lambda \in K, \forall \mu \in K, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

(La même notation a été adoptée ici pour les lois internes sur E et F , ainsi que pour les lois externes; le plus souvent cette convention n'engendre aucune ambiguïté.)

Rem. 1. La définition précédente peut être étendue au cas de deux modules E et F sur le même anneau unitaire K , mais cela entraîne des changements assez profonds dans la théorie.

Rem. 2. Combinaisons et combineurs linéaires. Soit, dans un espace K -vectoriel E , $(x_i)_{i \in H}$ une famille de vecteurs, indexée par un ensemble H , et $(\lambda_i)_{i \in H}$ une famille de scalaires de K , indexée aussi par H , telle que les λ_i soient "presque tous nuls" (c'est-à-dire nuls sauf un nombre fini d'entre eux). Le vecteur de E défini par $\sum_{i \in H} \lambda_i x_i$ est usuellement appelé *combinaison linéaire des x_i , à coefficients λ_i* ; en particulier, si H est une partie de E , $\sum_{x \in H} \lambda_x x$ est une combinaison linéaire des vecteurs de H .

La famille $(x_i)_{i \in H}$ étant donnée, on notera que dans certains cas deux familles de scalaires différentes peuvent donner le même vecteur. On peut mettre l'accent sur le rôle des coefficients en associant à chaque famille $(\lambda_i)_{i \in H}$ d'éléments d'un corps K un *combineur linéaire* qui fait correspondre à toute famille $(x_i)_{i \in H}$ de vecteurs d'un espace K -vectoriel E , indexée par H , le vecteur $\sum_{i \in H} \lambda_i x_i$ de E . Une fois l'espace E fixé, le combineur linéaire se réduit à une application (linéaire, à valeurs dans E).

Avec cette notion, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit linéaire qui s'écrit

$$f\left(\sum_{i \in H} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in H} \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les λ_i (presque tous nuls) et les x_i , s'énonce: L'image par f de toute combinaison linéaire de vecteurs est la combinaison linéaire, de même combinateur, des images de ces vecteurs.

Rem. 3. Dans les espaces vectoriels topologiques de dimension infinie les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues; néanmoins, dans beaucoup d'ouvrages où l'on ne considère que des applications continues, il faut prendre garde que le qualificatif "linéaire" sous-entend parfois la continuité.

Les applications K -linéaires sont des *morphismes* de la structure d'espace K -vectoriel; la composée de deux applications K -linéaires est une application K -linéaire. Une application linéaire est encore appelée *homomorphisme d'espaces vectoriels*, et, dans le cas où $E = F$, *endomorphisme de l'espace vectoriel* E , ou encore *opérateur linéaire* sur E (par abus de langage on dit souvent "homomorphisme" ou "endomorphisme" tout court; mais on prendra garde que ces mots n'ont de sens que relativement à une structure bien précisée: une application peut ne pas être un endomorphisme pour la structure d'espace vectoriel tout en étant un endomorphisme du groupe abélien sous-jacent, par exemple).

Si $F = K$, l'application linéaire est dite *forme linéaire* sur E (ou *covecteur* de E).

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est usuellement noté $\mathcal{L}(E, F)$ ou encore $\text{Hom}(E, F)$.

2.2. Exemples et contre-exemples.

1. L'application constante qui à tout vecteur de E fait correspondre le vecteur nul de F est manifestement linéaire.

2. Sur tout espace vectoriel l'application identique est un endomorphisme.

3. Si $E = F = K$, toutes les applications linéaires sont de la forme $x \mapsto ax$, où a est un élément de K .

4. Si $E = F = \mathbb{C}$ avec $K = \mathbb{R}$, et si $a \in \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ est une application linéaire, de même que $z \mapsto \bar{z}$. En revanche, si $E = F = K = \mathbb{C}$, $z \mapsto az$ est encore linéaire, mais $z \mapsto \bar{z}$ ne l'est pas (c'est un endomorphisme de groupe abélien, mais non d'espace vectoriel).

5. E étant l'espace vectoriel sur K des applications d'un ensemble Ω vers un corps K , et a un élément donné de Ω , l'application de E vers K : $\varphi \mapsto \varphi(a)$ est une forme linéaire.

6. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies sur \mathbb{R} , a un élément de E , et \mathcal{D}_a l'espace \mathbb{R} -vectoriel des applications f définies dans un voisinage de a dans E , à valeurs dans F , et différentiables en a . Alors $f'(a)$, dérivée de f en a , est une application \mathbb{R} -linéaire et continue de E dans F (qui s'identifie à un élément de \mathbb{R} quand $E = F = \mathbb{R}$), et $f \mapsto f'(a)$ est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathcal{D}_a dans $\mathcal{L}(E, F)$.

7. Soit E l'espace des fonctions réelles continûment différentiables d'une variable réelle et F l'espace des fonctions réelles continues d'une variable réelle: l'application de E vers F qui à toute fonction f de E fait correspondre sa fonction dérivée f' est linéaire. Dans le cas de l'espace P_n des polynômes de degré au plus égal à n , on peut associer à la dérivation soit un endomorphisme de P_n soit une application linéaire de P_n dans P_{n-1} .

8. Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[a, b]$; l'application qui à une telle fonction f fait correspondre le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est une forme linéaire sur E , alors que $f \mapsto \int_a^b |f(t)| dt$ n'en est pas une.

9. Dans l'espace vectoriel réel euclidien de la géométrie élémentaire, une homothétie, une projection, une rotation, une symétrie sont linéaires. En revanche, dans un espace K -vectoriel quelconque, une homothétie $x \longmapsto \alpha x$ ($\alpha \in K$) n'en est pas nécessairement une (elle peut ne pas l'être si K n'est pas commutatif).

10. Le "principe de superposition" qui apparaît dans diverses parties de la Physique manifeste la présence d'applications linéaires (qui sont souvent des applications linéaires tangentes).

2.3. Principales propriétés des applications linéaires. Toute application linéaire f de E dans F possède les propriétés suivantes:

1. L'image d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . Il en est ainsi en particulier pour l'image de E : on l'appelle souvent *image de f* et on la note $\text{Im}(f)$. Dire que F est surjective équivaut à dire que $\text{Im}(f) = F$.

2. L'image réciproque d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E . Il en est ainsi en particulier pour l'image réciproque de $\{0_F\}$, appelée *noyau de f* et notée $\text{Ker}(f)$ [NOYAU]. On vérifie que f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

3. Si une bijection de E sur F est linéaire, on démontre que la bijection réciproque l'est aussi. Toute bijection linéaire de E sur F est appelée *isomorphisme* de l'espace vectoriel E sur l'espace vectoriel F ; deux espaces vectoriels sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de l'un sur l'autre. Un isomorphisme de E sur E s'appelle un *automorphisme* de E .

4. Si le corps K est commutatif, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F constitue un espace vectoriel sur K pour les lois définies par

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

et

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

(la propriété $(\alpha f)(\lambda x) = \lambda(\alpha f)(x)$ étant assurée par la commutativité de K).

$\mathcal{L}(E, K)$ s'appelle aussi le *dual* de E (abréviation pour "espace vectoriel dual") et se note souvent E^* . [DUAL] .

5. Si f appartient à $\mathcal{L}(E, F)$ et g à $\mathcal{L}(F, G)$, alors on vérifie que $g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}(E, G)$. Il en résulte que $\mathcal{L}(E, E)$ est, relativement aux lois $+$ et \circ , un anneau unitaire, appelé *anneau des endomorphismes* de E .

2.4. Groupe linéaire. L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E constitue, pour la composition des applications, un groupe appelé *groupe linéaire* sur E , noté $GL(E)$ ou parfois $Aut(E)$. C'est un sous-groupe du groupe symétrique de E .

Tous les espaces vectoriels de même dimension finie n sur le même corps K sont isomorphes entre eux et à K^n ; leurs groupes linéaires sont eux-mêmes isomorphes entre eux et au groupe des matrices carrées inversibles d'ordre n à éléments dans K ; ce dernier groupe est appelé *groupe linéaire à n variables* sur K et noté $GL_n(K)$.

Sous-groupes distingués. On sait que l'on peut partager les bases d'un espace vectoriel de dimension n sur \mathbf{R} en deux classes d'équivalence, le déterminant des matrices de passage [2.5] à l'intérieur d'une classe étant strictement positif, et d'une classe à l'autre strictement négatif. Ceux des automorphismes qui conservent l'orientation de \mathbf{R}^n forment un groupe isomorphe au groupe des matrices carrées d'ordre n de déterminant strictement positif; c'est un sous-groupe distingué de $GL_n(\mathbf{R})$, qu'on peut noter $GL_n^+(\mathbf{R})$.

Un autre sous-groupe distingué est formé par les automorphismes qui conservent le volume orienté des bases de \mathbf{R}^n ; il est isomorphe au groupe des matrices carrées d'ordre n dont le déterminant vaut $+1$. Ce sous-groupe est le *groupe linéaire spécial* à n variables sur \mathbf{R} , noté $SL_n(\mathbf{R})$.

Représentation linéaire des groupes. Une représentation linéaire d'un groupe n'est autre qu'un homomorphisme de ce groupe dans un groupe linéaire; comme l'étude des groupes linéaires est plus commode, la théorie de ces représentations fournit des outils d'investigation puissants pour l'étude des propriétés des groupes quelconques.

2.5. Cas d'espaces de dimensions finies; matrices d'une application linéaire. Si E et F sont de dimensions finies, n et p respectivement, $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension np ; en particulier le dual $\mathcal{L}(E, K)$ de E est de même dimension que E , donc lui est isomorphe (mais non canoniquement isomorphe); cela n'est pas vrai dans le cas de dimension infinie.

Soient (a_1, a_2, \dots, a_n) une base \mathcal{A} de E , (b_1, b_2, \dots, b_p) une base \mathcal{B} de F ; toute application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par la connaissance des p coordonnées sur \mathcal{B} de chacun des n vecteurs $f(a_i)$. On appelle matrice représentative de f par rapport aux bases \mathcal{A} et \mathcal{B} la matrice de format (p, n) — c'est-à-dire à p lignes et n colonnes — dont la colonne d'indice i est formée par les coordonnées sur \mathcal{B} de $f(a_i)$. Noter que, si l'on sous-entend que dans l'espace des scalaires on prend pour base l'unité, on peut également parler de la ligne représentative d'un covecteur de E dans une base \mathcal{A} de E [MATRICE].

Si g est une application linéaire de F dans l'espace G muni de la base \mathcal{C} et si N est la matrice de g par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} , alors la composée $g \circ f$ a pour matrice par rapport aux bases \mathcal{A} et \mathcal{C} le produit matriciel $N.M$; c'est là que résident la justification et l'intérêt du produit matriciel.

Si f est bijective (et seulement dans ce cas), M est inversible, et f^{-1} est représentée dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{A} par M^{-1} .

En particulier, si $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ est une nouvelle base \mathcal{A}' de E , la matrice A , carrée, inversible, d'ordre n , qui représente l'application identique de E par rapport aux bases \mathcal{A} au départ et \mathcal{A}' à l'arrivée sera dite *matrice de passage de \mathcal{A}' à \mathcal{A}* , puisque a_i est une combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{A}' dont le combinateur provient de la colonne d'indice i de A . La matrice de passage de \mathcal{A} à \mathcal{A}' est alors A^{-1} .

On remarquera que, lorsqu'on passe de la colonne X des coordonnées d'un vecteur dans la base \mathcal{A} à la colonne X' de ses coordonnées dans la base \mathcal{A}' , c'est par la formule matricielle $X' = A.X$, et que A est la matrice de passage (*en sens inverse*) de \mathcal{A}' à \mathcal{A} . C'est cela que l'on appelle la contravariance des coordonnées d'un vecteur dans un changement de base. Au contraire les coordonnées d'un covecteur de E , élément du dual E^\star , sont dites, elles, covariantes dans un changement de base de E (mais pas de E^\star !): car, si un covecteur est représenté par une ligne L dans \mathcal{A} et L' dans \mathcal{A}' , on a $L' = L.A^{-1}$.

On doit prendre garde que certains auteurs appellent matrice de passage *de \mathcal{A} à \mathcal{A}'* la matrice de changement des coordonnées d'un vecteur quand on passe de \mathcal{A} à \mathcal{A}' , convention inverse de celle que nous avons adoptée ici.

Toutes les matrices qui représentent la même application linéaire par rapport à diverses bases appartiennent à une même classe d'équivalence et sont dites équivalentes. Si A est la matrice de passage de la base \mathcal{A}' à la base \mathcal{A} , et B la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} , et si, relativement aux bases \mathcal{A} et \mathcal{B} , l'application linéaire f est représentée par la matrice M , la matrice M' qui la représente relativement aux bases \mathcal{A}' et \mathcal{B}' est $B.M.A^{-1}$. D'ailleurs l'équivalence de M et M' peut être définie par l'existence de matrices carrées inversibles A et B telles que $M' = B.M.A^{-1}$.

Le *rang* d'une application linéaire est la dimension de son image. C'est aussi le rang de sa matrice par rapport à des bases données. Deux matrices de même format (p, n) sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

2.6. *Equations (inéquations, "systèmes") linéaires.* Résoudre une équation, une inéquation, ou un "système" linéaires peut toujours se formuler ainsi: étant donné une application linéaire f de E dans F (ces espaces pouvant être des espaces de fonctions), trouver l'image réciproque par f d'une partie de F .

Dans le cas des équations il s'agit en général, y étant un élément de F , de trouver l'ensemble des x de E tels que $f(x) = y$. Cet ensemble est vide si $y \notin \text{Im}(f)$. Ce cas exclu, si x_0 est une solution particulière, l'équation équivaut à $f(x) - f(x_0) = 0_F$, et par conséquent à $x - x_0 \in \text{Ker}(f)$: ainsi la connaissance de x_0 et de $\text{Ker}(f)$ fournit d'emblée la solution générale, qui est un espace affine sur $\text{Ker}(f)$. Si en particulier $y = 0_F$, l'équation (ou système) est dite homogène, et l'ensemble-solution est $\text{Ker}(f)$.

Quand les espaces sont de dimensions finies, ce qu'on appelle usuellement "système linéaire de p équations à n inconnues" peut s'écrire sous la forme $A.X = B$, où A est une matrice de format (p, n) , B est une matrice colonne d'ordre p , et X une matrice colonne inconnue d'ordre n ; le rang du système est le rang r de A . Si $n = p = r$, c'est-à-dire si la matrice A est inversible (système de Cramer), il y a une solution, qui est unique, à savoir $A^{-1}.B$.

3. Variétés linéaires.

3.1. *Variétés linéaires affines (resp. projectives).* Etant donné un espace affine (resp. projectif), l'habitude a été prise d'appeler "variétés linéaires affines" (resp. "projectives") ce qu'on peut appeler plus simplement ses sous-espaces affines (resp. projectifs). [AFFINE, PROJECTIF]

3.2. *Pinceaux (faisceaux), réseaux, ... linéaires.* Outre les plans et droites de la géométrie élémentaire, la géométrie algé-

brique offre des exemples classiques de telles “variétés linéaires”. En effet les polynômes homogènes de degré m à r variables, à coefficients dans un corps commutatif K , forment un espace K -vectoriel, et les classes de tels polynômes modulo une homothétie un espace projectif. Ses sous-espaces projectifs de dimension 1, 2, 3 respectivement peuvent être appelés *pinceaux* (naguère faisceaux) *linéaires*, *réseaux linéaires*, *complexes linéaires* de polynômes. Or, comme ces polynômes à leur tour peuvent servir à définir des variétés algébriques de degré m dans un autre espace projectif F de dimension $r - 1$ sur le même corps, on aboutit aux notions usuelles de pinceaux (ou faisceaux), réseaux, complexes linéaires de “surfaces” dans F .

Ex.: L'ensemble des sphères de l'espace (resp. cercles du plan) passant par deux points fixes est un réseau (resp. pinceau) linéaire; l'ensemble des sphères orthogonales à une sphère fixe est un complexe linéaire.

Le même procédé s'applique à des couples de polynômes, donc aux intersections de “surfaces” de F . Les variétés linéaires de dimension 1 dont les éléments sont de telles intersections n'ont pas reçu de nom particulier (mais chacun des systèmes de génératrices rectilignes d'une quadrique en fournit un bon exemple); celles qui sont de dimension 2 ou 3 s'appellent respectivement *congruences linéaires* et *complexes linéaires*.

Exemples de congruences linéaires: l'ensemble des cercles de l'espace qui passent par deux points fixes, l'ensemble des droites de l'espace qui rencontrent deux droites non coplanaires. (Les complexes et congruences de droites peuvent être abordés d'autre façon grâce aux coordonnées plückériennes, et rien n'empêche d'accéder à une généralité plus grande encore: ainsi la considération de pinceaux linéaires de complexes est courante dans la théorie des complexes de droites).

4. Programmation linéaire

Résoudre un “programme linéaire” consiste à minimiser (ou, le cas échéant, maximiser) la valeur d'une forme linéaire sur \mathbb{R}^n , l'inconnue étant soumise à des “contraintes” représentées par des égalités ou des inégalités linéaires.