exposant, n. m. 1973-1/2
[exponentiel]

Us. : Part. prés. substantivé du vb. *exposer*, désignant une personne qui présente les produits de son industrie, ses oeuvres artistiques, etc. dans une exposition commerciale, une galerie d'art, etc. En mathématique, dans l'écriture 2^5, le 5 (qui "affiche" la puissance de 2 considérée) est appelé *exposant* de la puissance. L'habitude prise d'écrire les exposants en petits caractères en haut et à droite de la base de la puissance conduit quelquefois à dire qu'on écrit un indice "en exposant" quand on l'écrit en haut et à droite de la lettre indexée.

1. Exposants entiers.

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne associative, notée multiplicativement.

1.1. Si a est un élément de E et n un naturel non nul, on sait qu'on appelle $n^{\text{ème}}$ puissance de a : a lui-même si $n = 1$, le produit de n facteurs a si $n > 1$ (on dit usuellement *carré* pour "deuxième puissance" et *cube* pour "troisième puissance") ; a est appelé *base* de la puissance et n *exposant* de la puissance. La notation usuelle de la $n^{\text{ème}}$ puissance est a^{n}, qui se lit "a exposant n" (et non, selon un usage regrettable, "a puissance n");

1.2. Si E contient un élément u neutre pour la loi multiplication, et si a est régulier pour cette loi, on pose par convention $a^{\text{o}} = u$; tel est en particulier le cas si E est un anneau unitaire et si a n'est pas un diviseur de zéro.

1.3. Si de plus l'élément a possède un inverse unique noté a', on pose par convention $a^{-\text{n}} = a'^{\text{n}}$; en particulier $a^{-1} = a'$.

Ex. : Si $E = \mathbf{C}$, a^n a un sens : 1) quels que soient le complexe a et le naturel non nul n ; 2) quels que soient le complexe non nul a et l'entier n.

Rem. 1. Les règles de calcul usuelles
(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et (2) $(a^m)^n = a^{mn}$ s'appliquent sans restriction au cas [**1.1**] et, dans les conditions précisées en [**1.2**] et [**1.3**], à ces deux cas : en particulier la double égalité $(a^{-1})^n = a^{-n} = (a^n)^{-1}$ traduit la convention [**1.3**] et le fait que a^{-n} et a^n sont inverses.

Rem. 2. En revanche la règle (3) $a^m \times b^m = (ab)^m$ ne peut être appliquée de façon générale que si la loi multiplication est commutative.

Rem. 3. Avec ou sans commutativité, dans le cas [**1.3**] on a : $(ab)^{-1} = b^{-1} \times a^{-1}$.

2. Exposants rationnels.

2.1. *Cas d'une base strictement positive.* Soit a un réel strictement positif, p un entier, q un naturel non nul ; q' étant un naturel non nul, on montre que, si $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$; cela fonde la notion d'exposant rationnel et justifie que $\sqrt[q]{a^p}$ s'écrive encore $a^{\frac{p}{q}}$, lu "a exposant p sur q" (si p et q sont donnés numériquement, on lit comme de coutume "a exposant trois quarts", "a exposant moins sept cinquièmes", etc.). On montre de plus que les règles de calcul (1) (2) (3) rappelées en [1] s'appliquent aux puissances d'exposants rationnels ; en particulier $a^{\frac{p}{q}}$, pouvant s'écrire indifféremment $\left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$ ou $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$, s'interprète à volonté comme $\sqrt[q]{a^p}$ ou $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p$.

2.2. *Autres cas.* Si et seulement si r est un rationnel strictement positif, l'écriture 0^r reste légitime et désigne 0 ; les règles ci-dessus demeurent applicables.

Il est tout à fait déconseillé d'étendre la notion d'exposant rationnel aux puissances à base négative : en effet les ambiguïtés signalées à la notice RADICAL sont encore aggravées. On sait distinguer, si a est strictement négatif, $\left(\sqrt[6]{a}\right)^2$ qui n'a aucun sens, $\sqrt[6]{a^2}$ qui est positif, et (si l'on décide de donner un sens à cette écriture) $\sqrt[3]{a}$ qui est négatif ; au contraire l'exposant rationnel engendrerait la confusion.

3. Exposants complexes.

3.1 *Cas d'une base strictement positive.* Soit a un réel strictement positif, z un complexe. Désignant le logarithme népérien par la notation Log, on considère la série qui a pour premier terme 1 et pour terme général $\frac{(z \operatorname{Log} a)^n}{n\,!}$: cette série est convergente et, lorsque z est rationnel, sa somme est a^z; aussi sert-elle de définition à la puissance de base a et d'exposant complexe (éventuellement réel) z , que l'on continue à noter a^z, lu "a exposant z". On montre que les règles (1) et (3) restent applicables à ces puissances ; quant à la règle (2), l'écriture $(a^z)^{z'}$ n'a de sens, d'après la convention faite ici, que si z est lui-même réel : dans ce cas la règle est applicable et $(a^z)^{z'} = a^{zz'}$.

3.2. *Autres cas.* Si et seulement si z a sa partie réelle strictement positive, l'écriture 0^z reste légitime et désigne 0 ; les règles (1) (2) (3) restent applicables.

L'extension de la définition donnée en [**3.1**] au cas $a \in \mathbf{C} - \{0\}$, $z \in \mathbf{C}$ n'est possible que si l'on est en mesure de préciser la signification de Log a : à cet effet des conventions nouvelles sont nécessaires ; moyennant ces conventions, les règles du calcul des exposants s'appliquent alors de façon tout à fait générale.

exponentiel, adj.

Mot de formation savante (lat. *exponens* = exposant) et d'usage purement mathématique.

La série entière en z introduite ci-dessus en [3.1] est dite *série exponentielle de base a.* L'application de **C** dans **C** (éventuellement de **R** dans **R**) $z \longmapsto a^z$ est dite *fonction exponentielle de base a* (elle se note aussi $\exp_a$). Cette fonction, sa dérivée et par conséquent toutes ses dérivées successives sont entre elles dans des rapports constants, le rapport de la $k^{\text{ème}}$ dérivée à la fonction étant $\mathrm{Log}^k a$.

Si dans la série exponentielle on remplace z et $\mathrm{Log}\, a$ par 1, le réel e qu'on obtient pour somme est par définition la base des logarithmes népériens. La *fonction exponentielle népérienne,* plus couramment *exponentielle* tout court, est la fonction $z \longmapsto e^z$, notée aussi exp ; on peut ramener toutes les autres fonctions exponentielles à celle-là puisque $a^z = e^{z \,\mathrm{Log}\, a}$. Cette fonction et toutes ses dérivées sont égales. Cette propriété analytique remarquable, la parenté de l'exponentielle avec les fonctions circulaires, et par ailleurs le fait qu'en physique, biologie, sociologie, économie, etc. le modèle exponentiel décrit de façon satisfaisante beaucoup de phénomènes d'expansion et d'extinction, expliquent la grande importance théorique et pratique de cette fonction.

Le procédé de développement en série qui a servi à définir l'exponentielle peut s'appliquer dans d'autres cas, par exemple l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à éléments réels. Toutefois, la multiplication n'étant pas commutative, on prendra garde que la règle

$$\exp x \times \exp y = \exp (x + y)$$

n'est plus valable en général.