alterné, adj. 1973 - 1/1

Us.: Le lat. *alter*, qui a donné *autre*, signifiait plus précisément "l 'autre quand il s'agit de deux". Cette nuance de sens se retrouve dans *alterner, alternatif*, etc.: ainsi on parle de stationnement alterné suivant les jours pairs ou impairs. La situation math. n'est pas sans analogie, la notion d'alternance étant liée dans la plupart des cas à la parité des permutations.

1. Applications multilinéaires alternées.

1.1. *Définition.* Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps commutatif K. Une application multilinéaire f de E^p dans F est dite *alternée* si, chaque fois que deux au moins des éléments $x_1, \ldots, x_p$ de E sont égaux, $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = 0$. On en déduit que

$$f(\ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots) = -f(\ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots)$$

c'est-à-dire que l'application f est antisymétrique. Réciproquement, dans le cas où le corps K est de caractéristique différente de 2, toute application multilinéaire antisymétrique est alternée et il n'y a pas lieu, alors, de distinguer entre applications multilinéaires "alternées" et "antisymétriques".

Comme il est de règle pour toutes les applications linéaires ou multilinéaires, on dit, lorsque F = K, *forme multilinéaire alternée.*

Ex.: La multiplication vectorielle dans $\mathbf{R}^3$ est une application bilinéaire alternée de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$; le produit mixte usuel est une forme trilinéaire alternée de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}$.

1.2. *Propriétés principales.* Si f est une application p-linéaire alternée et si $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont linéairement dépendants, alors $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est nul; il en résulte que toute application multilinéaire alternée d'ordre strictement supérieur à la dimension de E est nulle.

Si l'espace est de dimension finie n sur K, soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} x_i^j e_j$, on a, en utilisant la linéarité:

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant n} \ldots \sum_{1 \leqslant j_p \leqslant n} x_1^{j_1} \ldots x_p^{j_p} \, f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$$

Parmi les $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$ tous ceux qui ont au moins deux indices égaux sont nuls, et tous ceux dont les ensembles d'indices sont les mêmes sont égaux ou opposés: il suffit donc de connaître les vecteurs $f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$ pour toute suite strictement croissante $j : i \longmapsto j_i$ qui applique $\{1, \ldots, p\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Inversement, si l'on se donne un vecteur v_j pour chaque suite j strictement croissante, il existe une application p-linéaire alternée f et une seule qui satisfait à

$$\forall j, \quad f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = v_j \quad .$$

Dans le cas où $p = n$, il suffit de se donner $f(e_1, \ldots, e_n)$ et on a alors :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left[\sum_j \sigma(j) \, x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n} \right] f(e_1, \ldots, e_n)$$

où j décrit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et $\sigma(j)$ désigne la signature de la permutation j [PERMUTATION].

En particulier, si $F = K$, $f(e_1, \ldots, e_n)$ est un scalaire, par suite les formes n-linéaires alternées sur E^n (E étant de dimension n) forment un espace vectoriel de dimension 1.

2. Groupe alterné.

On sait que l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ constitue un groupe appelé groupe symétrique; l'ensemble des permutations paires en constitue un sous-groupe invariant, appelé *groupe alterné*, usuellement noté $\mathfrak{A}_n$ [PERMUTATION].