multilinéaire, adj.

Ce mot n'est employé que par les mathématiciens, avec un sens qui découle clairement de sa formation.

N. B. Dans toute cette notice, K désigne un corps commutatif.

Applications multilinéaires

1.1 Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ ($n \geqslant 2$) et F des espaces vectoriels sur K, f une application de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ dans F. Assignant une valeur à l'indice i, et fixant un vecteur x_j dans chaque espace E_j dont l'indice j diffère de i, on considère l'application partielle qui à chaque vecteur x_i de E_i associe la valeur $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On dit que f est *n-linéaire* si et seulement si pour chaque i et pour tous les choix des x_j toutes les applications partielles sont linéaires. Lorsque $n = 2$ (resp. $n = 3$), on dit *bilinéaire* (resp. *trilinéaire*); le terme *multilinéaire* englobe tous les cas où $n \geqslant 2$.

On a exclu le cas où $n = 1$, pour lequel f serait linéaire. En effet il faut se garder de confondre les deux notions, une application multilinéaire ne pouvant être linéaire que dans le cas de l'application nulle. Si f et g sont définies sur $E_1 \times E_2$, f étant bilinéaire et g linéaire, on a :

$$f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f(x_1, y_1) + f(x_1, y_2) + f(x_2, y_1) + f(x_2, y_2)$$

alors que

$$g(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = g(x_1, y_1) + g(x_2, y_2),$$

et de même:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 f(x, y)$$

alors que

$$g(\alpha x, \alpha y) = \alpha\, g(x, y).$$

Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont le même espace E, on parle par abus de langage d'application n-linéaire de E dans F.

De même que pour les applications linéaires, on dit *forme n-linéaire* quand $F = K$.

Ex.1. Dans K, l'application qui à $(x_1, x_2, ..., x_n)$ fait correspondre le produit $x_1 x_2 ... x_n$ est n-linéaire.

Ex.2. La multiplication vectorielle canonique dans $\mathbf{R}^3$ est une application bilinéaire de $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$.

Ex.3. Si E_1 et E_2 sont l'espace vectoriel P des fonctions polynomes sur **R**, l'application

$$(A, B) \longmapsto \int_a^b A(t)\, B(t)\, dt$$

est une forme bilinéaire sur P.

Ex.4. Soit $E^\star$ l'espace des formes linéaires sur E [DUAL], f l'une de ces formes, $f(x)$ la valeur qu'elle prend pour le vecteur x de E, parfois notée $< x, f >$; l'application de $E \times E^\star$ dans K: $(x, f) \longmapsto <x, f>$ est alors appelée *forme bilinéaire fondamentale* (ou *canonique*) sur $E \times E^\star$.

Ex.5. Si $E_1 = E_2 = K^n$, l'application qui au couple de vecteurs $((x^1, x^2, ..., x^n), (y^1, y^2, ..., y^n))$ associe le scalaire $x^1 y^1 + ... + x^n y^n$ est la forme bilinéaire (symétrique) appelée *multiplication scalaire canonique* sur K^n.

1.2. *Propriétés principales.* Certaines propriétés des applications multilinéaires rappellent celles des applications linéaires; en particulier les applications multilinéaires de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ dans F constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ dans F, et la mutilinéarité entraîne l'existence d'identités analogues à celles des applications linéaires; ainsi dans le cas d'une application bilinéaire f on a:

$$f(\sum_i x^i a_i, \sum_j y^j b_j) = \sum_{i,j} x^i y^j f(a_i, b_j)$$

où les a_i sont des vecteurs de E_1, les b_j des vecteurs de E_2, les x^i et les y^j étant des scalaires et les $f(a_i, b_j)$ des vecteurs de F.

Dans le cas de dimensions finies, si $(a_1, ..., a_p)$ est une base de E_1 et $(b_1, ..., b_q)$ une base de E_2 et si les x^i et les y^j sont respectivement les coordonnées des vecteurs x de E_1 et y de E_2 par rapport à ces bases, on voit que l'application f est parfaitement déterminée par la donnée des pq éléments $f(a_i, b_j)$ de F, dont il suffit de connaître les coordonnées par rapport à une base de F. En particulier une forme bilinéaire est définie par les pq scalaires $f(a_i, b_j)$; ainsi, pour retrouver le produit scalaire de l'exemple 5, il suffit de prendre pour $(a_1, ..., a_n)$ la base canonique de K^n et de poser, pour tout i et tout j de $\{1, 2, ..., n\}$, $f(a_i, a_i) = 1$ et, si $i \neq j$, $f(a_i, a_j) = 0$.

On se reportera à la notice TENSORIEL pour l'importante propriété que voici. Etant donné deux espaces vectoriels E_1 et E_2 sur K, on sait construire un espace vectoriel sur K, noté $E_1 \otimes E_2$, et une application bilinéaire u de $E_1 \times E_2$ dans $E_1 \otimes E_2$ possédant la propriété suivante: quels que soient l'espace vectoriel F sur K et l'application *bilinéaire* f de $E_1 \times E_2$ dans F, il existe une application *linéaire* $\hat{f}$ vérifiant $f = \hat{f} \circ u$. Ceci permet, notamment quand on connaît $E_1 \otimes E_2$ et u, de ramener tous les problèmes d'applications bilinéaires définies sur $E_1 \times E_2$ à des problèmes d'applications linéaires définies sur $E_1 \otimes E_2$. Le procédé se généralise au cas d'un nombre n quelconque d'espaces vectoriels $E_1, E_2 ..., E_n$ sur un corps K.