Matériaux pour un dictionnaire

par M. ARNOULD

Affaires de familles

Je voudrais attirer l'attention sur un problème qui se pose dans notre enseignement, en particulier depuis l'introduction des nouveaux programmes du second cycle secondaire: celui des "systèmes" libres ou liés et des bases. Ce terme "système" employé traditionnellement n'a pas un sens très précis, si bien qu'on préfère le remplacer aujourd'hui par un terme mieux défini. On a le choix entre:

— partie (c'est-à-dire sous-ensemble);
— famille (application d'un ensemble quelconque, dont les éléments seront appelés indices, dans l'espace vectoriel);
— n-uplet (couple, triplet, etc...).

Ces objets mathématiques sont de natures tout-à-fait différentes: employer l'un pour l'autre donne lieu, même dans des manuels sérieux, à des énoncés imprécis ou faux. Ainsi, on lit (Queysanne et Revuz, classe de Première, tome 1, page 31) que, si une droite vectorielle F admet pour base $\{a_1\}$ et un plan vectoriel G admet pour base $\{b_1, b_2\}$, on a $F \subset G$ si et seulement si $\{a_1, b_1, b_2\}$ est liée. Or, si $a_1 = b_1$ par exemple, $F \subset G$ et pourtant la partie $\{a_1, b_1, b_2\}$ n'est autre que la paire $\{b_1, b_2\}$, qui est indubitablement une partie libre! C'est une famille, ou le triplet (a_1, b_1, b_2), qu'il aurait fallu employer ici.

De même le théorème "L'image d'un système lié, par une application linéaire quelconque, est un système lié" n'est valable que si on prend des familles (*) ou des n-uplets, mais pas si l'on prend des parties: en effet, si i et j sont deux vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel, et f un endomorphisme de cet espace tel que $f(i) = i$ et $f(j) = 0$, la partie liée $\{i, i+j, i+2j\}$ a pour image par f le singleton $\{i\}$ qui est une partie libre.

Un problème analogue se pose pour les bases. On peut bien dire que la partie $\{i, j, k\}$ est une base (ou $\{i, k, j\}$ ou $\{k, i, j\}$, c'est toujours la même partie!), mais que signifie que v ait pour

(*) Mais attention! l'image par f d'une famille $\varphi : i \longmapsto \varphi(i) = x_i$ est alors la famille $i \longmapsto f(x_i)$, c'est-à-dire $f \circ \varphi$

coordonnées 3, 4 et 5 dans cette base ? A-t-on $v = 3k + 4i + 5j$ ou $v = 3i + 4k + 5j$? Pour pouvoir affecter un coefficient à chaque vecteur de base il faut avoir choisi un *n*-uplet comme base et un *n*-uplet de coordonnées; ou une base-famille et une famille indexée par le même ensemble pour les coordonnées; ou, si on prend une partie de l'espace vectoriel pour base, prendre pour "coordonnées d'un vecteur" une application de cette partie dans le corps. L'ambiguïté du mot "base" est une source de difficultés.

En fait, il y a des passerelles entre ces notions de partie, famille et *n*-uplet. Ainsi à chaque famille on peut associer canoniquement une partie: l'ensemble des valeurs prises par cette famille (application), c'est-à-dire son ensemble-image. D'autre part à toute partie on peut associer canoniquement une famille: son application identique; elle en est évidemment l'ensemble-image.

De plus, il y a une bijection canonique entre l'ensemble, E^n, des *n*-uplets d'éléments de E et l'ensemble des familles d'éléments de E indexées par $\{1, 2, ..., n\}$, c'est-à-dire l'ensemble $E^{\{1, 2, ..., n\}}$ des applications de $\{1, 2, ..., n\}$ dans E.

Les notions ainsi associées donnent lieu aux théorèmes suivants (entre autres):

a) une famille de vecteurs est génératrice si et seulement si son ensemble-image est une partie génératrice;

b) une famille de vecteurs est libre si et seulement si elle est injective et que son ensemble-image est une partie libre;

c) un *n*-uplet de vecteurs est libre (resp. générateur) si et seulement si la famille associée l'est aussi.

En présence de ces notions voisines mais nécessitant des théories différentes, le réflexe du mathématicien, et plus encore du pédagogue, est d'essayer de n'en garder qu'une, qui donne lieu à des définitions et des démonstrations simples et qui permette de résoudre tous les problèmes qui se posent.

Au niveau de l'enseignement secondaire, je pense que la notion la plus utile —voire indispensable dans les questions d'orientation— est celle de famille (finie, indexée par $\{1, 2, ..., n\}$), ou de *n*-uplet, ce qui revient pratiquement au même, les deux notions étant d'ailleurs souvent mêlées sans inconvénient majeur. Cependant, si on décide de se tenir à cette position, on devra dire par exemple que toute sur-famille d'une famille est liée, ce qui nécessite de définir ce qu'on appelle sur-famille. De même on ne pourra plus parler du cardinal des bases d'un espace vectoriel.

En revanche, quand on arrive dans les espaces vectoriels de dimension infinie non dénombrable, il n'y a plus de choix privilégié de l'ensemble d'indices (à moins d'utiliser les cardinaux de la théorie de Zermelo-Frankel), si bien que la présence de cet ensemble complique beaucoup les choses et que l'emploi de parties est ici largement préférable.

En conclusion, je crois que les deux notions devront encore coexister dans les mathématiques tant qu'on n'aura pas trouvé mieux, mais nous devons réfléchir sérieusement à la question pour éviter de donner à nos élèves des résultats faux et pour choisir une présentation aussi simple et claire que possible. Une position d'attente consisterait à dire "bases" pour les parties et "bases indexées" (très supérieur à "bases ordonnées") pour les familles.

Annexe: Comparaison des définitions

Soit K un corps, I un ensemble quelconque: on notera $K^{(I)}$ l'ensemble des applications de I dans K qui prennent la valeur 0 sauf en un nombre fini de points (dans le cas où I est fini, $K^{(I)}$ n'est autre que l'ensemble, K^I, des applications de I dans K). D'autre part, E désignera un espace K-vectoriel, et la notation " ! " signifie "pour au plus un".

Famille libre

$g : I \longrightarrow E$ est une famille libre de vecteurs de E si et seulement si

$$\exists ! \quad \varphi \in K^{(I)} \quad , \sum_{i \in I} \varphi(i)\, g(i) = 0$$

(cette unique application φ étant visiblement l'application nulle) ou encore:

$$\forall x \in E, \quad ! \psi \in K^{(I)} \quad , \sum_{i \in I} \psi(i)\ g(i) = x$$

Famille génératrice (resp. *famille-base*):

Il suffit de remplacer dans la seconde définition ! par $\exists$ (resp. $\exists !$).

Partie libre

F est une partie libre de E si et seulement si

$$\exists ! \quad \varphi \in K^{(F)} , \sum_{y \in F} \varphi(y) . y = 0$$

ou encore:

$$\forall x \in E , \; ! \; \psi \in K^{(F)} \; , \sum_{y \in F} \psi(y) . y = x$$

Partie génératrice (resp. *partie-base*):

Il suffit de remplacer dans la seconde définition ! par $\exists$ (resp. $\exists!$). Dans le cas d'une base, c'est cette unique ψ qui constitue "les coordonnées de x".

Remarque. Si, $g : I \longrightarrow E$ étant une famille de vecteurs éléments de E, on considère l'application $\varphi \longmapsto \sum_{i \in I} \varphi(i)\, g(i)$ de $K^{(I)}$ dans E, g est libre (resp. génératrice ou base) si et seulement si cette application est injective (resp. surjective, bijective).

De même, si F est une partie de E, elle est libre (resp. génératrice, base) si et seulement si l'application $\varphi \longmapsto \sum_{y \in F} \varphi(y) \,.\, y$ de $K^{(F)}$ dans E est injective (resp. surjective, bijective).

J'appelais de mes voeux dans le précédent numéro la participation de jeunes collègues à la Commission du Dictionnaire. Je souhaite que l'exemple de Michel ARNOULD, intégré depuis quelques mois à l'équipe parisienne, et auteur des remarques ci-dessus, soit l'annonce d'une "relève".

Par ailleurs je signale une erreur dans la notice LINEAIRE fiche 2/5 verso: à l'exemple 3 il faut lire $x \longmapsto xa$ et non $x \longmapsto ax$ (le corps n'étant pas nécessairement commutatif). Une faute matérielle se trouve aussi au verso de la fiche 1/5: à la 8ème ligne de la Remarque 2, l'indice sous le Σ est évidemment x, et non i.

J.M.C.

(Auto)critique d'une critique

(Auto)critique d'une critique. Dans le *Bulletin* 289, p. 390, ayant distingué trois dégénérescences du parallélogramme, je prétendais que, pour la deuxième, l'ensemble P avait deux éléments ; en fait il en a quatre : (A,B,B,A), (A,A,B,B), (B,A,A,B), (B,B,A,A). Les lecteurs "auront rectifié d'eux-mêmes", mais cette formule commode ne me dispense pas de m'excuser auprès d'eux et auprès de l'auteur de l'article, G. SCHACHERER, d'Epernay.

J.M. CHEVALLIER