Abus de langage et notations

J. LELONG - FERRAND (Paris VI)

Le Bulletin de l'A.P.M.E.P. (N° 286, Décembre 1972) me paraît inaugurer des échanges fructueux entre professeurs et mathématiciens de toutes catégories sur les problèmes proprement pédagogiques, et je l'en félicite.

Dans cette optique, je me permets de prendre à nouveau la plume pour parler de quelques exemples pouvant servir de sujet de réflexions.

Dans son dernier article J. M. Chevallier nous fait part des difficultés que rencontre la Commission du dictionnaire pour noter l'image d'un ensemble A par une application f. Cet aveu me surprend beaucoup, car les mathématiciens de tous les pays désignent tous cet ensemble par f(A), notation simple et commode en relation avec celle de l'image réciproque $f^{-1}(A)$. Quel inconvénient y a-t-il à cela, et pourquoi les lycéens français seraient-ils privés d'une notation aussi universelle ?. On me répondra sans doute que cette notation est ambiguë, car elle revient à noter de la même manière l'application f, de l'ensemble X dans l'ensemble Y, et l'application de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(Y)$ qui lui est canoniquement associée. Est-ce très grave en pratique ? En trente ans d'enseignement, je n'ai jamais rencontré d'erreur due à cet abus de langage, alors que je trouve couramment, chez des étudiants de Maîtrise, des erreurs de raisonnement dues à une confusion implicite de "*quel que soit*" avec "*il existe*", ou de l'intersection avec la réunion ! Certes Bourbaki (théorie des ensembles livre I p. 87) donne bien un exemple amusant de raisonnement faux basé sur l'abus de langage dont nous parlons ; mais il s'agit, en fait, d'une confusion * entre l'ensemble à un seul élément $\{N\}$ et l'ensemble N ! La surcharge représentée par l'introduction d'un nouveau symbole propre à l'enseignement secondaire français me paraît un danger plus sérieux , l'essentiel est d'insister sur la différence entre l'élément x d'un ensemble X, et l'élément $\{x\}$ de $\mathcal{P}(X)$.

Si on ne voulait tolérer aucun abus de langage (ou d'écriture), comme les mathématiques deviendraient ennuyeuses ou pénibles à rédiger ! Pour s'en rendre compte, il suffit de voir combien l'emploi du symbole $\alpha(A,B)$, au lieu de AB, pour désigner la distance de deux points dans l'espace euclidien, peut rendre les démonstrations de géométrie pénibles à lire et à écrire ! De même, dans la théorie des développements limités, on se paralyserait inutilement en refusant l'abus de langage (admis par Bourbaki) qui consiste à écrire $f = O(\phi)$ au lieu de $f \in O(\phi)$.

Le problème est de discerner les abus de langage utiles, voire indispensables pour la pratique, et ceux qui peuvent induire en erreur. On pourrait peut-être penser que lorsqu'une notation, ou expression, a été adoptée par tous les pays et utilisée sans inconvénient pendant un quart de siècle dans l'enseignement supérieur, il n'est peut-être pas nécessaire d'en chercher de plus compliquées.

Or je lis dans un manuel de Seconde C (Thuizat et Girault, Collection Durrande) : "*il est déconseillé de traduire la notation* $a \in E$ *par "a appartient à E" car le sens du mot "appartient" présente pour les débutants, une ambiguïté dangereuse*".

J'avoue que je n'ai pas compris quel était le danger à redouter, puisque cette expression est celle que nous employons

* A ce propos, j'ai appris que la confusion dont je parle est maintenant commise par les élèves de lycée de façon courante : dressés à mettre partout des accolades, ils écrivent $\{N\}$ au lieu de N. Les pédagogues voudront-ils bien reconnaître que l'ensemble N, qui est l'ensemble de base des Mathématiques, n'est défini ni "en extension" ni "en compréhension" ?

tous. Par contre, il faut ranger dans les ambiguïtés dangereuses les fameux diagrammes de Venn ou de Carroll, qui induisent en erreur tous les petits enfants : n'est un ensemble que ce qui est entouré par une corde !

Dans le domaine de la pédagogie, il faut bien reconnaître qu'il y a des ambiguïtés dangereuses et d'autres qui sont commodes : si je définis le triangle comme un ensemble formé de trois points non alignés du plan euclidien, chacun comprend ce que signifie "*l'aire du triangle*". Pourtant il ne s'agit pas de l'aire de l'ensemble en question, mais de "*l'aire du compact plan dont la frontière est constituée par la réunion des côtés du triangle*". Qui voudra obliger les lycéens à employer une telle périphrase ?

Est-il bien nécessaire aussi d'imposer aux élèves la distinction entre l'inclusion stricte et l'inclusion large d'un ensemble dans un autre ?

L'inclusion stricte est une relation que l'on ne rencontre que dans les exemples "ad hoc" ; sa rareté fait qu'il vaut la peine d'attirer l'attention sur elle en la notant ($A \subset B$ et $A \neq B$), et en laissant au symbole $A \subset B$ le sens d'inclusion large.

Enfin sous prétexte qu'il est ambigu, faut-il faire du mot "*angle*" un mot tabou (alors qu'on le rencontre partout) et obliger les élèves (et leurs maîtres) à une gymnastique verbale compliquée pour raisonner sur des triangles qui sont "rectangles en un de leurs sommets" mais dont on ne doit pas dire qu'ils ont un angle droit ! (cf. cours de troisième).

Les interdictions, distinctions et mises en garde inutiles, que l'on rencontre actuellement dans les manuels traitant de "Mathématiques Modernes" me rappellent fâcheusement les précautions que l'on m'obligeait à prendre lorsque j'étais élève pour parler de "la mesure de l'aire" et non de l'aire d'un domaine plan **.

Si vraiment certaines notations ou expressions classiques en Mathématiques apparaissent comme dangereuses au niveau de telle classe du second degré, n'est-ce pas, en fait, parce que les élèves de cette classe n'ont pas la maturité suffisante pour assimiler la notion qu'elles désignent ? Et plutôt que d'introduire une terminologie provisoire et compliquée ou d'établir des distinctions subtiles, ne vaudrait-il pas mieux attendre que les élèves soient

** Elles ont même un effet plus grave : les élèves n'osent plus lever la main en classe tant ils ont peur de se faire gronder pour des incorrections de langage (qui ne seraient pas nécessairement des *incorrections aux yeux des mathématiciens* !). *La recherche* d'une rigueur absolue (qui n'est d'ailleurs qu'un mirage) peut avoir des effets paralysants à tous les niveaux.

capables de saisir ces notions dans toute leur simplicité ?

En voici un exemple : si E est un espace vectoriel sur le corps K, les applications linéaires de K dans E forment un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}(K,E)$, isomorphe à E : or, pour le mathématicien, deux espaces isomorphes sont indiscernables. Est-il donc nécessaire d'introduire un nouveau terme d'usage provisoire tel que celui de "contravecteurs" pour désigner les éléments de $\mathcal{L}(K,E)$?

Il est certain que la quantité d'explications nécessaires pour introduire une notion mathématique nouvelle augmente énormément lorsqu'on s'adresse à des élèves trop jeunes ; et, si cette notion ne leur est pas utile, pourquoi passer tant de temps à la leur expliquer ? Pour ne citer qu'un exemple : la "composition des correspondances", que les étudiants de Maîtrise ont de la peine à manipuler, et que l'on ne rencontre que très rarement à l'heure actuelle en Mathématiques, a-t-elle bien sa place dans les classes de sixième et de cinquième ?

Pour terminer, je voudrais exprimer mon regret que les programmes récemment publiés mettent souvent la géométrie à la fin, comme si c'était la partie la moins importante. Sans doute les Commentaires précisent-ils que l'ordre n'est pas imposé ; mais leur présentation matérielle peut induire en erreur les enseignants soucieux de rénovation pédagogique. Le plan — parfaitement licite — qui consisterait à traiter la géométrie assez tôt, permettrait de donner une meilleure motivation aux généralités sur les relations ; il amènerait le professeur à se rendre compte que les manuels contiennent souvent des notions inutiles (dans l'absolu, ou au niveau considéré) ; et la géométrie "rénovée" reprendrait sa juste place dans la formation mathématique.