Bulletin de l'APMEP n°291 - Décembre 1973

5

RUBRIQUES DE L'A.P.M.E.P.

Cent fois sur le métier...

Par P. ROUGEE (ROUEN)

Il y a des morts qu'il faut tuer souvent. Voilà plus de dix ans que quelques mécaniciens conscients tuent par exemple la "vitesse d'origine M", soutenus par l'espoir que la Réforme de l'Enseignement Mathématique mettrait fin un jour à l'obscurantisme et les libérerait de cette tâche. Le désespoir risque de les gagner en voyant ces morts remis en selle ... dans le bulletin de l'A.P.M. lui-même ! (N° 289 - Commentaires à propos d'un article sur les vecteurs). Et par des personnes autorisées, qui mathématisent (de bonne foi et fort bien, là n'est pas la question) les "idées sous-jacentes" qu'elles ont des vitesses ou des champs et qui ne sont que les idées fausses reçues.

En matière de définition on a évidemment tous les droits, y compris celui de définir des moutons à cinq pattes tel le "pointeur vitesse $(M, \overrightarrow{V_M})$" résolument inutile. Que l'on parle de vitesse moyenne, de quantité de mouvement, de deux points ayant même vitesse, etc..., le mot vitesse utilisé désigne toujours le vecteur libre et pas le pointeur.

Un "point en mouvement M" est en fait une application

$$M \left| \begin{array}{l} T \subset R \longrightarrow \xi \\ \qquad t \longmapsto M(t) \end{array} \right.$$

d'un intervalle T de R dans un espace affine euclidien ξ (dont nous noterons E l'espace vectoriel associé). Quel que soit $t \in T$, l'élément M(t) de ξ caractérise la *position* de M à t, et l'élément $\overrightarrow{V(t)}$ de E égal par définition à la dérivée de l'application M en t caractérise *sa vitesse*. Quant au pointeur $(M(t), \overrightarrow{V(t)})$, il représente à la fois la *position et la vitesse* de M à t. Et à ce titre, il faudrait, si on tient vraiment à institutionnaliser ce couple, l'appeler "pointeur position-vitesse" — Mais alors, je pose la :

Question : Que dirait le mathématicien si, histoire d'apporter sa contribution à la compréhension de la notion de dérivée, son collègue physicien soufflait à ses élèves la

Définition :

$(\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ $(\forall x \in \mathbb{R})$, on appelle "pointeur application-dérivée (en abrégé : pointeur-dérivée) de f en x" le couple $(f(x), f'(x)) \in \mathbb{R}^2$?

Quel usage en ferait-il ? Se laisserait-il convaincre par l'argument de vente qui consisterait à prétendre que le gadget en question est indispensable pour calculer la dérivée de l'application f^2 ou celle deLog f ?

Alors pourquoi vouloir convaincre le mécanicien qu'il ne peut se passer de l'institution "pointeur-vitesse $(M(t), \frac{d\vec{M}}{dt}(t))$" pour calculer le moment cinétique $m\,\overrightarrow{PM(t)} \wedge \frac{d\vec{M}}{dt}(t)$, en un point $P \in \xi$ et à l'instant $t \in T$, du point en mouvement $M \in \xi^T$? ?

En conclusion, je crois que dans son ouverture aux autres disciplines la science mathématique a aussi besoin d'être à l'écoute de ces disciplines. Quelle que soit l'image traditionnelle que le matyématicien se fait de la mécanique et des mécaniciens, il y a beau temps que les points soulevés ici (et bien d'autres) sont parfaitement clarifiés, et en parfaite harmonie avec les mathématiques dites modernes, chez certains enseignants mécaniciens.

Deux remarques

1. Maintenant que nous savons que la forme la plus commode de ce que l'on utilisait autrefois sous l'appellation "vecteur lié" est... un pointeur, pourquoi ne pas utiliser la terminologie "vecteur lié de ξ" plutôt que pointeur ? Cela me paraît tout à fait souhaitable et même *indispensable pour favoriser le dialogue avec les physiciens.*

2. Quels que soient les liens de parenté entr'elles, j'ai besoin, pour schématiser le concret avec le maximum de nuances et surtout *le plus intrinsèquement possible*, des structures vectorielles *et* des structures affines. Le totalitarisme pro-vectoriel, même (et surtout !) assorti d'acrobaties et d'étude de variance pour retrouver l'affine, me paraît analogue et aussi maladroit (quoique moins grave) que l'ignorance de la structure vectorielle qui contraignait les gens à travailler dans $\mathbb{R}^n$ et à manipuler par exemple les endomorphismes sous forme de classes d'équivalence dans l'ensemble des matrices $(n \times n)$.

Les physiciens aiment les théorèmes de variance (donc d'invariance) : ils croient y découvrir de grandes lois de la nature. Mais souvent *ces théorèmes ne sont que le nécessaire rattrapage d'un défaut d'"intrinséquité" de la théorie*, défaut *consécutif à un choix pour le modèle mathématique d'une structure trop riche par rapport au concret à mathématiser* : ici $\mathbf{R}^n$ au lieu d'un espace vectoriel, là un espace vectoriel au lieu d'un espace affine, ailleurs un espace linéaire au lieu d'une variété, etc... Il faut alors "relativiser" l'excès de richesse de l'outil mathématique (ici une base, là l'origine, ailleurs une carte, etc...) en le "faisant varier" : d'où le terme de variance.

L'emploi d'emblée de l'outil mathématique optimum évite ces difficultés et conduit à une théorie physique plus intrinsèque et plus simple. C'est pourquoi je crois que les physiciens et mécaniciens ont besoin des outils vectoriels *et* affines pour construire leurs modèles, même si dans chaque exercice ils s'empressent de choisir une origine et une base pour calculer dans $\mathbf{R}^n$ ... comme tout le monde.