

Histoire et leçon d'une recherche ⁽¹⁾

par E. EHRHART (Strasbourg)

Comment naît et se développe une recherche mathématique ? Cette genèse présente-t-elle quelques caractères généraux ? Questions délicates. Si je tente quand même d'y répondre pour le modeste cas particulier de mon travail de thèse, c'est que deux circonstances me facilitent la tâche : je dispose encore de mes brouillons dès le début, et surtout mon sujet ne fait appel qu'à des connaissances mathématiques courantes. Mon étude, publiée en 1967 par le Journal de Crelle, a pour titre "Sur un problème de géométrie diophantienne linéaire".

Excusez-moi si je commence par une énumération un peu fastidieuse de définitions et de notations ; ce ne sera pas long.

(1) Extrait d'une conférence faite à la Régionale de Strasbourg en mai 1972.

Un point est *entier* si ses coordonnées le sont, un polyèdre est entier si ses sommets le sont. Le *dénominateur* d'un point ou d'un polyèdre rationnel est le plus petit entier d tel que son homologue dans l'homothétie $(0, d)$ soit entier, 0 étant l'origine. On désigne par i le nombre de points entiers d'un polyèdre ouvert, par j celui du polyèdre fermé et par p celui de son bord. Pour le polyèdre homologue dans l'homothétie $(0, n)$, on les note i_n, j_n, p_n . On désigne par k le nombre de dimensions du polyèdre et par c sa caractéristique topologique d'Euler-Poincaré. On obtient la *mesure réticulaire* d'un polyèdre en prenant comme unité la maille du réseau des points entiers de son espace. La *mesure réticulaire du bord* d'un polyèdre entier est la somme des mesures réticulaires de ses faces $k-1$ -dimensionnelles. Le système $\sum a_i X_i = n, X_i \geq 0$, où les coefficients donnés a_i et le paramètre n sont des entiers positifs, est nommé *système d'Euler*. On appelle *compteur* d'un système diophantien le nombre de ses solutions entières. Si a_1, a_2, \dots, a_g sont les dénominateurs des sommets d'un polyèdre, le produit formel $\pi(t) = (1-t^{a_1}) (1-t^{a_2}) \dots (1-t^{a_g})$ est son *produit sommital*. On écrit $\{\pi(t)\} = 0$ la relation de récurrence linéaire "eulérienne" obtenue en remplaçant dans le produit $\pi(t)$ effectué toute puissance t^r par t_{n-r} ; par exemple $\{(1-t)(1-t^2)\} = 0$ s'écrit $i_n - i_{n-1} - i_{n-2} + i_{n-3} = 0$. Enfin, on appelle *polynôme mixte* un polynôme dont les coefficients, au lieu d'être constants, sont des fonctions périodiques de la variable.

Mon étude a débuté par un enthousiasme, le jour où je suis tombé sur un théorème de Minkowski: "Soit un ovale pourvu d'un centre de symétrie placé à l'origine O d'un réseau. Si son aire dépasse 4, O n'est pas le seul point entier interne". La limite est stricte, car certains parallélogrammes, centrés en O et d'aire 4, n'ont pas d'autre point entier interne. Cela est simple, insolite et beau. La même semaine encore j'établis un théorème analogue pour un ovale asymétrique.

Mon intérêt pour les réseaux entiers étant ainsi éveillé, je me mets à jouer avec des polygones sur du papier quadrillé. L'aire d'un polygone m'apparaît comme une bonne approximation pour le nombre de ses points entiers, en comptant un point périphérique pour $1/2$, car pour la réunion de deux polygones adjacents, un tel point vaut 1. Expérience : pour des polygones entiers variés,

je porte dans une colonne l'aire S et dans l'autre le nombre $i + \frac{p}{2}$. Constat : la différence $i + \frac{p}{2} - S$ vaut toujours 1. Je nomme cette différence "excès", je la note Δ , et je démontre sa constance en décomposant le polygone en triangles élémentaires. La décomposition simpliciale va dorénavant être un outil de choix pour mes démonstrations. La formule $S = i + \frac{p}{2} - 1$ me montre qu'on peut "compter les aires".

Peut-on aussi compter les volumes ? Je tente la même expérience avec des polyèdres entiers. Echec : $\Delta = i + \frac{p}{2} - V$ n'est pas constant ; je vois même qu'il peut devenir infini. Comment se comporte Δ quand on dilate le polyèdre ? Je dresse la liste des excès $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ d'un tétraèdre entier et de ses premiers homothétiques. Constat : $\Delta_n = n\Delta$. Je recommence avec d'autres polyèdres entiers ; ça marche encore. Je finis par trouver, non sans peine, une démonstration de cette formule.

De $\Delta_n = c$ pour un polygone et $\Delta_n = n\Delta$ pour un polyèdre tridimensionnel, je déduis facilement les relations

$$(1) \quad j_n = Sn^2 + \frac{\ell}{2}n + c, \quad i_n = Sn^2 - \frac{\ell n}{2} + c$$

$$(2) \quad j_n = Vn^3 + \frac{S}{2}n^2 + \Delta n + c, \quad i_n = Vn^3 - \frac{S}{2}n^2 + \Delta n - c.$$

Dans (1) S et ℓ sont l'aire et le périmètre réticulaires du polygone entier. Dans (2) V et S sont le volume et la surface réticulaires du polyèdre entier. La loi de réciprocity $i(n) = (-1)^k j(-n)$ saute ici aux yeux. Je conjecture alors que, *quelle que soit la dimension k d'un polyèdre entier, i_n et j_n sont des polynômes en n , ce que je démontre un peu plus tard. J'en déduis en particulier*

$$(3) \quad j_n = (n-k)C_n^k (j-1)^{(k)}, \quad \text{où } \frac{j_r}{n-r} \text{ remplace } j^r,$$

$$(4) \quad V = \frac{(i-1)^{(k)}}{k!}, \quad \text{où } i_r \text{ remplace } i^r.$$

Et voilà qu'on peut quand même "compter les volumes", quel que soit k .

Je commence à voir la possibilité d'appliquer ces résultats géométriques aux systèmes diophantiens lineaires : le compteur d'un tel système est le j_n (ou le i_n) de son domaine polyédrique.

Mais en général le domaine primitif ($n=1$) d'un système homothétique est un polyèdre rationnel. En expérimentant sur de simples polygones de dénominateurs 2 ou 3, je ne tarde pas à m'apercevoir que pour des n congrus modulo 2 (respectivement modulo 3), les i_n sont des polynômes en n . Après quoi je démontre qu'étant donné un polygone de dénominateur m , i_n est un trinôme du second degré pour les n congrus modulo m . Autrement dit, si $m=3$, par exemple, le nombre a (ou b) dans $i_n = Sn^2 + an + b$ ne peut prendre que 3 valeurs, suivant la classe modulaire relativement à 3 à laquelle appartient n . Les fonctions $a(n)$ et $b(n)$ ont donc m pour période, et dans quelques exemples numériques je les exprime par des lignes trigonométriques.

Alors intervient un hasard heureux. Je rencontre dans mes lectures un système d'Euler, dont le compteur, déterminé par une fraction génératrice, vérifie une relation de récurrence eulérienne. Expérimentalement, je constate qu'il en est de même pour les systèmes homothétiques non eulériens. J'ai alors une inspiration subite : *la relation de récurrence n'est autre que $\{\pi(i)\} = 0$, où $\pi(t)$ est le produit sommital du polyèdre rationnel que définit le système, quelles que soient sa dimension ou sa topologie.* Mais durant toute une année cette relation reste mystérieuse. Jusqu'à ce qu'un jour une idée, surgie brusquement, me permette de la démontrer en une heure. Cette idée est inattendue : il faut placer d'une certaine manière dans un réseau à $k+1$ dimensions un réseau k -dimensionnel et un simplexe associé. Du théorème sur le produit sommital résulte que le i_n (ou j_n) de tout polyèdre rationnel est un polynôme mixte en n , que l'on peut déterminer à partir de quelques valeurs initiales.

Quant à la loi de réciprocité des polyèdres rationnels de toutes dimensions, conjecturée en 1960, je n'ai pu la démontrer complètement que sept ans après !

Ce récit simplifié de mon cheminement heuristique appelle quelques commentaires sans prétention, inspirés en partie par le beau petit livre "Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique" de Jacques Hadamard.

Les étapes qu'il distingue dans toute recherche fructueuse, je les retrouve dans ma modeste étude.

— *Un travail préliminaire conscient.* Une série d'observations, de lectures, de réflexions, de discussions, autour d'un centre d'intérêt suscitent une curiosité croissante et suggèrent des questions plus ou moins précises.

— *L'incubation du problème dans le subconscient* durant une période plus ou moins longue, où l'on ne s'en occupe pas sciemment. Henri Poincaré éclaire cette étape par l'image des "idées-atomes" : le travail préliminaire a mis en mouvement quelques atomes ; ils continuent dans l'inconscient à s'agiter ensemble (cogiter) ; leurs chocs, entre eux et avec d'autres atomes, qui étaient immobiles, produisent des combinaisons utiles.

— *Une reprise consciente et systématique de la question*, dans une intense activité d'expérimentation et de réflexion, le sujet s'imposant sans cesse à l'esprit comme une hantise, comme une obsession.

— *Une illumination subite* : la combinaison heureuse et rare se forme en un instant privilégié, qui profite de toutes les impasses déjà fermées, de tous les passages déjà ouverts.

— *Le finissage* : formulation précise du résultat trouvé, comme relais pour la recherche ultérieure ; contrôle minutieux des échelons de la démonstration ; appréciation de la valeur du produit ; examen des possibilités d'application. La volonté fixant l'attention sur la tâche à accomplir, on travaille maintenant, selon une image frappante de Paul Valéry, "comme l'employé de soi-même".

Au cours de ma recherche j'ai pensé souvent à une petite phrase qu'aimait répéter mon vénéré maître Georges Valiron : "Pour trouver une chose, il suffit d'y penser longtemps". Je me suis aussi souvenu d'une sentence de Paul Souriau : "Pour inventer, il faut penser à côté". Il faut être prompt à saisir une observation marginale, à reconnaître un produit de valeur. Mon problème a évolué de l'étude des ovales au comptage des volumes, puis au dénombrement des points entiers d'un polyèdre, pour aboutir finalement au calcul du compteur des systèmes diophantiens d'une certaine classe.

Mon travail m'a appris que dans sa recherche le mathématicien procède souvent comme le physicien : l'hypothèse naît de

l'observation, elle est ensuite confirmée (ou infirmée) par l'expérimentation sur des cas particuliers; et ce n'est qu'à la fin que la démonstration, suggérée elle-même par l'intuition, lui confère généralité et solidité.

Il importe de dégager des notions (mesure réticulaire, récurrence eulérienne), de choisir ses mots (produit sommital, polynôme mixte) et ses notations ($i, j, \{n(t)\}, \Delta$). Ces conventions facilitent la pensée en la contractant. L'image mentale est également d'un grand secours, car, comme le dit Descartes elle permet de "garder ensemble à l'esprit plusieurs choses indépendantes".

La vérité mathématique préexiste; elle n'est donc pas inventée mais découverte. Il est intéressant d'examiner les rôles que jouent dans cette découverte d'une part l'imagination et d'autre part la volonté. L'imagination, plus ou moins consciente, est spontanée. Elle ne produit aucune fatigue. Elle ne peut exécuter une tâche volontaire, tel un calcul, mais par ses rapprochements imprévus, elle projette sur la question d'éclatantes lumières. Les psychologues constatent que les images mentales faiblissent dès qu'apparaît la conscience volontaire. La volonté intervient dans les choix, dans le calcul précis et dans le raisonnement détaillé, dans l'effort de synthèse et de présentation, dans la persévérance devant les difficultés. Pas de résultat de valeur sans le concours de ces soeurs ennemies.